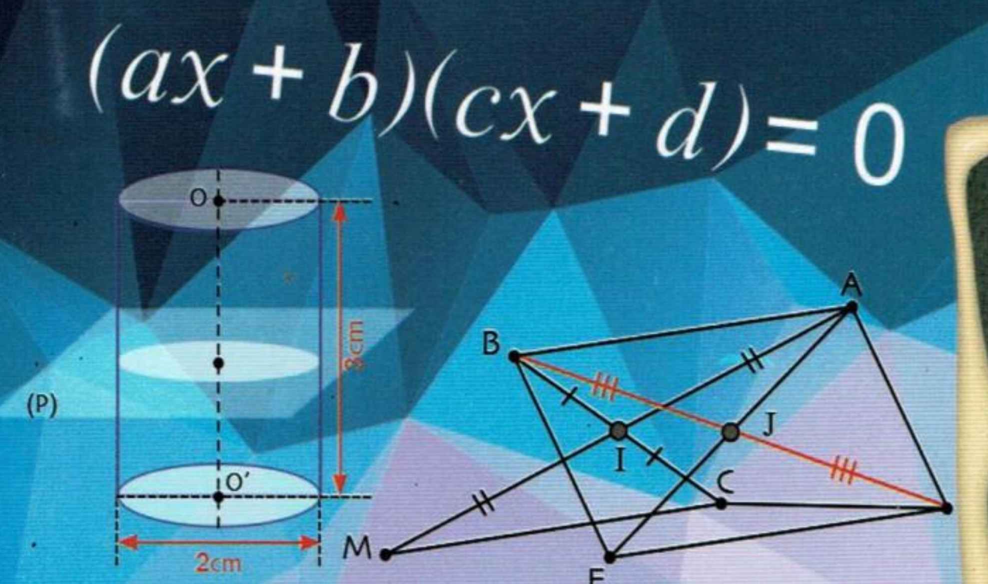
الجمهوريّة الجزائريّة الدّيمقراطيّة الشّعبيّة

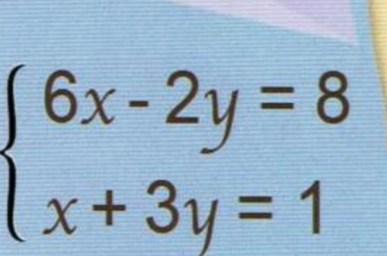
وزارة التّربية الوطنيّة

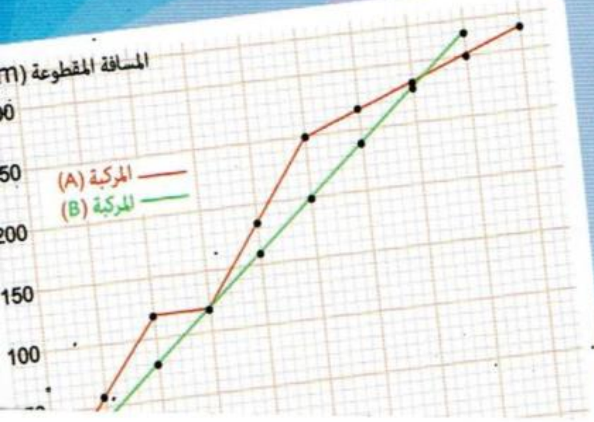
الرّياضيّات

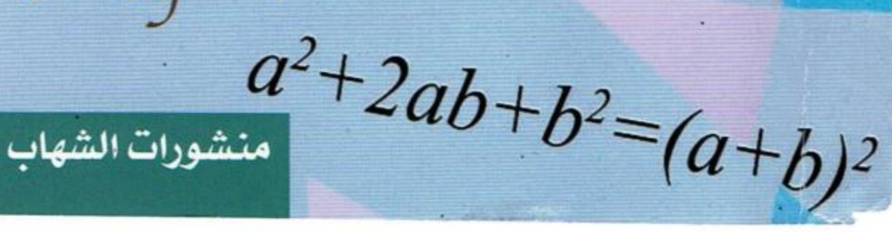


السّنة الرّابعة من التّعليم المتوسّط









منشورات الشهاب

كتاب الرياضيات الجديد

للسنة الرابعة من التعليم المتوسط حسب مناهج الجيل الثاني

هذا الجزء الأول يتضمن:

الباب الأول: الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

لا تنسونا من صالح دعائكم

الأستاذ: جودي رمزي – أ.ت.م - رياضيات

جويلية 2019

الجمهوريّة الجزائريّة الدّيمقراطيّة الشّعبيّة
وزارة التّربية الوطنيّة

الرّياضيّات

السّنة الرابعة من التّعليم المتوسّط

الإشراف التربوي
سعدي بشير

التنسيق البيداغوجي
بلعباس مصطفى

المؤلّفون

شرابطة بلقاسم	مفتّش التّربية الوطنيّة
رابح بنّاني	مفتّش التّربية والتّكوين
موسعي بوزيد	مفتّش التعليم المتوسط
بزاز البخاري	مفتّش التعليم المتوسط
فرحان إبراهيم	مفتّش التعليم المتوسط
إبجعودان أحسن	أستاذ التعليم الثانوي مكوّن

منشورات الشهاب

مسؤول المشروع : خوجة الجلد سيد علي

مسؤولة فنية : سي عبد الرحمان ناصرية

الفريق التقني : لعـراب عبد الكريم / خميسي مهدي / لعرابي محمد أمير

ردمك : 978-9947-39-350-5

الإيداع القانوني : السداسي الثاني، 2019.

منشورات الشهاب، 10 نهج إبراهيم غرافة باب الواد - الجزائر 16009

site : www.chihab.com / e-mail : chihab.edition@gmail.com

أنجز طبعه على مطابع Chihab Print - باتنة - الجزائر

تقديم الكتاب

أنجز هذا الكتاب تنفيذا للمنهاج الجديد الخاص بالسنة الرابعة من التعليم المتوسط وترجمة لمتطلباته، والذي سيشرع في العمل به ابتداء من الموسم الدراسي 2020/2019.

لهذا الغرض، تمت هيكلته بما يضمن تحقيق الكفاءات المقصودة من تعلّم الرياضيات في هذا المستوى التعليمي، وذلك بأجرأة بعض نتائج البحوث في ميداني البيداغوجيا وتعليمية المادة، كبناء ومقاربة المفاهيم من خلال وضعيات وأنشطة مناسبة، والتكفل بأخطاء التلاميذ، وتعلمّ الإدماج، واستعمال تكنولوجيات الإعلام والاتصال في التعلّمات، وتقديمها في فقرات تهدف إلى:

- تشجيع الاجراءات الشخصية للتلاميذ والتدرج في تعلّماتهم.
- تسهيل عمل الأستاذ بمساعدته في اختياراته.

محتويات الكتاب مرتبة حسب الميادين (العددي، الدوال وتنظيم معطيات، الهندسي)، وكل من أبوابه الأربعة عشر (14) لها نفس الهيكلة التي تحتوي على المحطات الآتية:

- صفحة تقديم الباب، ونجد فيها: التّعلمات المستهدفة، وروائز لاختبار المكتسبات القبلية ووضعية تحدي، وفقرة تثقيفية.
- الأنشطة: أنشطة ووضعيات في متناول التلاميذ لاكتشاف المفاهيم أو بنائها في القسم بمرافقة الأستاذ.
- المعارف: وفيها عرض للموارد المستهدفة بتعاريف وخواص مدعمة بأمثلة.
- طرائق: وضعيات وتمارين محلولة لتوظيف المعارف واستخلاص طرائق لحل عائلة من الوضعيات.
- أتمرن: تمارين مبوبة ومن أنماط مختلفة لإرساء الموارد.
- أقوّم معارفي: للوقوف عند مكتسبات التلميذ الجديدة والمعالجة الآنية للنقائص.
- أتعمق: تمارين أكثر تركيب وتمارين قصد تعلم البرهان وتمارين للحث على البحث.
- تعلّم الإدماج: وضعيات للتجنيد المدمج للموارد في وضعيات لها دلالة.
- استعمال تكنولوجيات الاعلام والاتصال: لإدماج الوسائل الجديدة للإعلام والاتصال في التعلّمات.

نأمل أن يكون هذا الكتاب وسيلة عمل فعالة، يستجيب لما ينتظره كل مستعمليه، وخاصة أبناءنا المقبلين على إنهاء مرحلة التعليم المتوسط الذين نتمنى لهم النجاح والتوفيق.

المؤلّفون.

استعمال الكتاب

تقديم الباب

- ذكر التّعلّمات المستهدفة.
- صورة مجسّدة للموضوع.
- عناصر من تاريخ الرّياضيّات أو من علاقتها بالواقع.
- مشكلة متعلّقة بالموضوع (تحدّي).



أستعد

الهدف هو التّشخيص واستحضار بعض المكتسبات الّتي لها صلة بالموضوع.

أنشطة

وضعيّات تعلّميّة مختارة و محفّزة لإرساء موارد.

- تعزيز المكتسبات القبليّة.
- إدخال مفاهيم جديدة.
- التّدرّب على البحث، التّبليغ و التّبرير.
- إرساء قيم.





معارف

تقديم الموارد المستهدفة في المنهاج : تعاريف، خواص، قواعد.



طرائق

وضعيّات مقترحة على المتعلّم تهدف إلى توظيف المعارف.

أوظّف تعلّماتي

تمارين متنوّعة للتّطبيق أو التّحويل.

أؤكّد تعلّماتي

التّقويم الذاتي للمكتسبات والمعارف.

أدمج تعلّماتي

وضعيّات مركّبة لتعلّم التّجنيد المدمج للموارد وتطوير قدرات البحث والتّبرير والتّبليغ في سياقات تسمح بإرساء قِيَم ومواقف.

أتعمّق

تمارين ومشكلات متنوّعة للتّعمّق والبحث والتّبليغ.





أوظّف تكنولوجيّات الإعلام و الاتّصال

نشاطات للتّدرّب على استعمال تكنولوجيّات الإعلام والاتّصال الجديدة وإدماجها في تعلّمات الرّياضيّات.

الفهرس

المصادر :

- الصفحة 7 : إقليدس http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=euclide

- الصفحة 19 : العدد الذهبي http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/rectangle_dor.htm

- الصفحة 31 : روني ديكارت /http://debart.pagesperso-orange.fr/geometrie

- الصفحة 43 : الخوارزمي http://ll.univ-poitiers.fr/llappli/wordpress/el-khawarizmi-le-fondateur-de-lalgebre-et-des-algorithme

- الصفحة 77 : سيلسيوس / فهرنهايت https://archi7.net/J34/index.php/notions/77-petite-histoire-des-echelles-de-temperature

- الصفحة 103 :طالس https://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/les-mathematiciens/198-thales-de-millet

- الصفحة 115 : جيب http://histoiredechiffres.free.fr/histoire%20notations/trigonometrie.htm

- الصفحة 127 : ميشال شال http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=chasles

الصور :

- الصفحة 16 : قصر الرياس https://www.guide-alger.com/sites-et-monuments/6093-le-bastion-23-palais-des-rais.html

- الصفحة 17: حديقة التجارب الحامة /https://www.jardinbotaniqueduhamma.dz

- الصفحة 28 : زربية واد سوف -https://berberosaharan.com/fr/laine-de-mouton/628-tapis-berbere-algerien-authentique-en-laine-de-mouton.html

- الصفحة 57 : متحف المجاهد http://www.alger-city.com/culture/musees/musee-national-du-moudjahid-a-el-madania

1 الأعداد الطبيعيّة والأعداد النّاطقة

سأتعلَم في هذا الباب

- التعرّف على قاسم لعدد طبيعي.
- تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي.
- تعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.
- التعرّف على عددين أوليين فيما بينهما.
- كتابة كسر على الشكل غير القابل للاختزال.

إقليدس هو رياضياتي إغريقي، عاش في القرن الثالث قبل الميلاد. اشتهر بإصداراته في الرياضيات وخاصة السلسلة المتكوّنة من 13 جزءًا والتي تسمى (كتاب العناصر) ؛ نجد في الجزء السابع من هذه السلسلة المبرهنة المتعلقة بالقاسم المشترك الأكبر وآلية حسابه، والتي تعرف اليوم بخوارزمية إقليدس.

إقليدس (325 - 265 ق.م)



تحدٍّ



بمناسبة الدخول المدرسي الجديد قرّر رئيس البلدية توزيع حصص من المآزر للإناث و للذكور على المدارس الابتدائية الواقعة في إقليم البلدية. لتحقيق هذه العملية اقتنت مصالح البلدية 936 مئزرا ورديا للإناث و845 مئزرا أزرقًا للذكور.
اقترح طريقة لتوزيع هذه المآزر بالتساوي على أكبر عدد ممكن من المدارس بحيث تتحصل كل مدرسة على العدد نفسه من المآزر من كل لون.

أستعدّ

أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

1) حاصل قسمة 1954 على 4 هو 488.

2) المساواة $137 = 5 \times 25 + 12$ تعبّر عن القسمة الإقليدية للعدد 137 على 5.

3) المساواة $72 = 24 \times 3$ تعبّر عن القسمة الإقليدية للعدد 72 على 24 إذن باقي هذه القسمة هو 3.

4) العدد 2017 يقبل القسمة على 2 لأن مجموع أرقامه يقبل القسمة على 2.

5) العدد 2935 يقبل القسمة على 5 لأن رقم وحداته يقبل القسمة على 5.

6) العدد 70902 يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9.

7) العدد المجهول في المساواة $\frac{....}{-10} = \frac{13}{5}$ هو 26-.

8) الكسر $\frac{34}{9}$ يساوي $\frac{238}{63}$.

9) مقلوب العدد الناطق $\frac{-11}{13}$ هو $\frac{11}{13}$ وحاصل القسمة $-\frac{9}{4} \div 9$ يساوي $-\frac{81}{4}$.

10) المجموع $\frac{7}{6} + \frac{6}{7}$ يساوي 1 والمجموع $1 + \frac{3}{5}$ يساوي $\frac{4}{5}$.

1 التعرّف على قاسم لعدد طبيعي

• أراد صاحب مكتبة ترتيب 420 كتابا في رفوف، بحيث يحتوي كل رفّ على نفس العدد من الكتب، ففكّر في كيفيتين:

أ) يضع 26 كتابا في كل رفّ.

ب) يضع 28 كتابا في كل رفّ.

أي الكيفيتين أنسب؟ اشرح.

ماذا يمثّل العدد 28 بالنّسبة إلى العدد 420؟

2 قواسم عدد طبيعي

أ) نريد تعيين كل قواسم العدد 60.

1) اكتب العدد 60 على شكل جداء عاملين بكلّ الأشكال الممكنة.

2) استنتج كل قواسم العدد 60 . (يمكنك الاستعانة بالجدول المقابل)

ب) عيّن كل قواسم العدد 48، كذلك بالنّسبة إلى العدد 17.

كتابة العدد 60 على شكل جداء عاملين	قواسم العدد 60
60 = 1 x 60	1 و 60
60 = 2 x ...	... و ...
60 = ... x ...	... و ...
....	....

3 خواص قواسم عدد طبيعي

أ) تحقّق من أن n يقسم كلا من العددين a و b في كل حالة من الحالات التالية:

1) $a = 18$ ، $b = 12$ ، $n = 3$ 2) $a = 35$ ، $b = 15$ ، $n = 5$ 3) $a = 56$ ، $b = 21$ ، $n = 7$

ب) تحقّق في كل حالة، من أن العدد n يقسم العدد $a + b$ ويقسم العدد $a - b$.

• انقل وأكمل التخمين الآتي: (إذا كان العدد n ..... كلا من العددين a و b فإن n يقسم ...... و n يقسم .....).

جـ) تحقّق في كل حالة من أنّ n، يقسم باقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

• انقل وأكمل التخمين الآتي: (إذا كان العدد n ..... كلا من العددين a و b فإن n يقسم باقي القسمة.....).

4 القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

أ) اقتنى بائع الزهور 90 زهرة حمراء و 54 زهرة بيضاء بغرض استعمالها كلّها في تشكيل باقات متماثلة في النوع والعدد.

1) هل يمكنه تشكيل 9 باقات؟ برّر إجابتك.

2) في حالة الإيجاب، حدّد عدد الزهور من كل لون في الباقة الواحدة.

ماذا يمثل العدد 9 بالنسبة إلى العددين 90 و 54؟

ب) 1) ما هو أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكنه تشكيلها؟

2) حدّد عندئذ عدد الزهور من كل لون في الباقة الواحدة.

نسمّي عدد الباقات المحصّل عليه القاسم المشترك الأكبر للعددين 90 و 54 ونرمز له بالرمز PGCD (90 ; 54).

5 تعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

1) أوجد قواسم كلّ من العددين 42 و 60.

2) أوجد القواسم المشتركة لهذين العددين.

3) ما هو أكبر قاسم مشترك للعددين 42 و 60؟

انقل و أكمل: «العدد ... يسمى القاسم ... ... للعددين 42 و 60». ونكتب ... PGCD (42 ; 60).

6 البحث عن القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

أ) باستعمال الفروق المتتابعة

نريد تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 252 و 140.

1) احسب الفرق 140 - 252 ثم اشرح لماذا PGCD(252 ; 140) = PGCD (140 ; 112).

2) انقل وأكمل (يمكن البدء بإتمام الجدول المقابل):

PGCD (252 ; 140) = PGCD (140 ; 112)

= PGCD (112 ; ...) ؛ = PGCD (... ; 25)

= PGCD (28 ; ...) ؛ = PGCD (... ; ...)

العددان		فرقهما
252	140	112
140	112	....
112	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

3) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 252 و 140.

4) عيّن بطريقة مماثلة لما سبق PGCD (378 ; 315).

ب) باستعمال عمليات القسمات المتتابعة (خوارزمية إقليدس)

أ) تحقّق من أنّه لتعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 765 و 135 بطريقة الفروق المتتابعة تلزم ثمان خطوات.

ب) لتعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 765 و 135 بطريقة القسمة.

1) انقل وأكمل ما يلي: « باقي القسمة الإقليدية للعدد 765 على العدد 135 هو ....»

2) اشرح لماذا PGCD (765 ; 135) = PGCD (135 ; 90).

3) انقل وأكمل مع تبرير كل خطوة (يمكن البدء بإتمام الجدول المقابل)

PGCD (135 ; 90) = PGCD (90 ; ...) لأنّ ....

PGCD (90 ; 45) = PGCD (45 ; ...) لأنّ ....

a	b	باقي قسمة a على b
765	135	....
135	....	....
....	....	....

4) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين الأوليّين 765 و 135.

5) عيّن بطريقة مماثلة لما سبق PGCD (3356 ; 1528).

7 العددان الأوّليّان فيما بينهما

أ) اشرح لماذا القاسم المشترك الأكبر للعددين 17 و 18 هو 1.

نقول إن العددين 17 و 18 أوليان فيما بينهما و نكتب 1 = PGCD (18 ; 17) .

ب) أثبت أن 22 و 35 أوليان فيما بينهما.

جـ) تقول مريم :«العددان 27 و 36 أوليان فيما بينهما». هل هي على صواب؟ اشرح.

8 اختزال كسر

أ) لاحظ كيف اختزل سمير الكسر $\frac{84}{48}$ واشرح طريقته.

$$\frac{84}{48} = \frac{84 \div 4}{48 \div 4} = \frac{21}{12} = \frac{21 \div 3}{12 \div 3} = \frac{7}{4}$$

هل يمكن مواصلة اختزال الكسر $\frac{7}{4}$؟ لماذا؟

نقول إنّ الكسر $\frac{7}{4}$ غير قابل للاختزال.

ب) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 84 و 48، ثمّ استعمله لاختزال الكسر السابق.

جـ) استنتج طريقة تسمح بكتابة كسر على الشكل غير القابل للاختزال.

د) هل الكسر $\frac{188}{252}$ قابل للاختزال؟ إذا كانت الإجابة «نعم»، اكتبه على شكل كسر غير قابل للاختزال.

1 قواسم عدد طبيعي

تعريف

a و b عددان طبيعيان حيث $b \neq 0$. القول أن b قاسم للعدد a، معناه أن باقي القسمة الإقليدية لـ a على b هو 0.

مثال

11 قاسم للعدد 143.

143 يقبل القسمة على 11.

$$\begin{array}{r|l} 143 & 11 \\ \hline 0 & 13 \end{array}$$

تعريف

a و b عددان طبيعيان حيث $b \neq 0$.
القول أن b قاسم للعدد a، معناه يوجد عدد طبيعي q حيث $a = b \times q$.

مثال

$20 \times 6 = 120$ ومنه 6 قاسم للعدد 120 وحاصل القسمة $q = 20$ و لدينا أيضا $6 \times 20 = 120$ ومنه 20 قاسم للعدد 120 و $q = 6$.

ملاحظات

1) كل الجمل الآتية لها نفس المعنى :

- b قاسم لـ a.
- b يقسم a.
- a يقبل القسمة على b.
- a مضاعف لـb.

2) 1 قاسم لكل عدد طبيعي a لأن $a = 1 \times a$.

3) كل عدد طبيعي غير معدوم يقبل القسمة على نفسه و نكتب $a = a \times 1$.

مثال

- 6 قاسم للعدد 120.
- 6 يقسم 120.
- 120 يقبل القسمة على 6 .
- 120 مضاعف للعدد 6.

2 خواص قواسم عدد طبيعي

خاصية1

a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة.

- إذا كان n يقسم كلا من a و b فإن n يقسم $a+b$ و $a-b$ $(a \geq b)$.
- إذا كان n يقسم a فإنّ n يقسم $k \times a$ حيث k عدد طبيعي.

مثال

9 يقسم 90 و يقسم 900
إذن 9 يقسم 90 - 900 أي يقسم 810
و 9 يقسم 90+900 أي يقسم 990.

خاصية2

a ، b ، n أعداد طبيعية غير معدومة حيث $a > b$.
إذا كان n يقسم كلا من a و b فإن n يقسم باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b.

مثال

5 يقسم كلا من 90 و 25 إذن 5 يقسم باقي القسمة الإقليدية للعدد 90 على 25 أي يقسم 15.

$$\begin{array}{r|l} 90 & 25 \\ \hline 15 & 3 \end{array}$$

3 القواسم المشتركة لعددين طبيعيين

تعريف

القواسم المشتركة لعددين طبيعيين a و b هي الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تقسم a و b في آن واحد.

مثال

- 6 قاسم مشترك لـ 12 و 18 لأن:
$12 = 2 \times 6$ و $18 = 3 \times 6$.
- قواسم 12 هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 و 12.

و قواسم العدد 18 هي: 1 ، 2 ، 3 ، 6 ، 9 و 18.
إذن القواسم المشتركة للعددين 12 و 18 هي 1 ، 2 ، 3 و 6.

• تعيين قواسم عدد طبيعي

تمرين: عيّن كل قواسم العدد 105.

حـل: لدينا 105 محصور بين 10^2 و 11^2 ومنه نختبر قابلية قسمة 105 على الأعداد من 1 إلى 10.

نجد 105 يقبل القسمة على كل من الأعداد 1 ، 3 ، 5 و 7.

ومن المساويات: $105 = 1 \times 105$ ، $105 = 3 \times 35$ ، $105 = 5 \times 21$ ، $105 = 7 \times 15$.

نجد أن 105 يقبل القسمة على 15 ، 21 ، 35 و 105.

ومنه قواسم 105 هي : 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 15 ، 21 ، 35 و 105.

طريقة

للبحث عن قواسم عدد طبيعي a

نجري القسمة الإقليدية للعدد a على الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها أصغر من a أو يساويه،

وفي حالات الباقي المعدوم، فإنّ كلا من المقسوم عليه والناتج هما قاسمان للعدد a.

• في حالة الأعداد 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 9 نطبق قواعد قابلية القسمة.

• أتعلّم البرهنة

«كيف أبرهن صحة خاصية من الشّكل «إذا ... فإنّ ...»؟

تمرين: n ، a و b أعداد طبيعية حيث $n \neq 0$.

برهن أنه إذا كان n يقسم كلا من a و b فإنّ n يقسم $a + b$.

حـل : المعطيات: n ، a و b أعداد طبيعية حيث $n \neq 0$.

n يقسم كلا من a و b.

المطلوب: n يقسم $a + b$.

برهان : لكي نبرهن أن n يقسم $a + b$ يكفي إيجاد عدد طبيعي k حيث $a + b = n \times k$.

لدينا من المعطيات n يقسم كلا من a و b.

إذن يوجد عددان طبيعيان q و 'q حيث $a = n \times q$ و $b = n \times q'$.

ومنه $a + b = n \times q + n \times q'$ وبالتالي $a + b = n(q + q')$.

بوضع $q + q' = k$ نجد $a + b = n \times k$.

بالتالي فإنّ $a + b = n \times k$ وهذا يعني أنّ n يقسم $a + b$.

طريقة

• لإثبات صحة خاصية من الشّكل «إذا ... فإنّ ...» نفرض صحة الشرط ونتأكد من صحة النتيجة.

• لإثبات أنّ عددا طبيعيا d يقسم عددا آخرا m يكفي إيجاد عدد طبيعي k حيث $m = d \times k$.

دوري الآن

1) عيّن القواسم المشتركة للعددين 65 و 78.

2) n ، a و b أعداد طبيعية حيث $a > b$ و $n \neq 0$.

برهن أنه إذا كان n يقسم كلا من a و b فإن n يقسم $a - b$.

4 القاسم المشترك الأكبر

تعريف

يُسمّى أكبر قاسم مشترك لعددين طبيعيين a و b القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين، ويرمز له بالرمز $\text{PGCD}(a\,;b)$.

مثال

- قواسم 28 هي 1 ، 2 ، 4 ، 7 ، 14 و 28
وقواسم 42 هي 1 ، 2، 3، 6، 7، 14، 21 و 42.
- القواسم المشتركة لـ 28 و 42 هي 1 ، 2 ، 7 و 14.
- القاسم المشترك الأكبر لـ 28 و 42 هو 14 و نكتب $\text{PGCD}(28;42) = 14$.

ملاحظة: مجموعة القواسم المشتركة لعددين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

انظر المثال السابق: قواسم العدد 14 هي: 1 ، 2 ، 7 و 14.

نتائج مباشرة

a و b عددان طبيعيان.

- $\text{PGCD}(a;a) = a$
- $\text{PGCD}(a;0) = a$
- إذا كان b قاسما للعدد a فإن $\text{PGCD}(a;b) = b$
- $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;a)$

مثال

$\text{PGCD}(28;28) = 28$

$\text{PGCD}(7;0) = 7$

$\text{PGCD}(40;8) = 8$

$\text{PGCD}(8;40) = \text{PGCD}(40;8) = 8$

خاصيتان

a و b عددان طبيعيان

- $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;a-b)$ مع $a \geq b$
- $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;r)$ مع r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b.

- $\text{PGCD}(21;14)=\text{PGCD}(14;7)=\text{PGCD}(7;7)=7$
- $\text{PGCD}(45;18)=\text{PGCD}(18;9)=\text{PGCD}(9;0)=9$

لأن $45 = 18 \times 2 + 9$ و $18 = 9 \times 2 + 0$.

5 العددان الأوّليّان فيما بينهما

تعريف

العددان الطبيعيان a و b أوليان فيما بينهما يعني أنّ قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1.

نكتب a و b أوليان فيما بينهما يعني $\text{PGCD}(a;b)=1$.

مثال

قواسم 22 هي 1 ؛ 2 ؛ 11 ؛ 22

وقواسم 15 هي 1 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 15.

إذن $\text{PGCD}(15;22) = 1$.

العددان 15 و 22 أوليان فيما بينهما.

6 الكسور غير القابلة للاختزال

تعريف

a و b عددان طبيعيان حيث $b \neq 0$.

الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للاختزال يعني a و b أوليان فيما بينهما.

ملاحظة

عندما نقسم كلا من بسط و مقام كسر على قاسمهما المشترك الأكبر نحصل على كسر غير قابل للاختزال.

أمثلة

- الكسر $\frac{15}{22}$ غير قابل للاختزال لأن 15 و 22 أوليان فيما بينهما أي $\text{PGCD}(22;15) = 1$.
- الكسر $\frac{28}{42}$ قابل للاختزال لأن 28 و 42 ليسا أوليين فيما بينهما. بالفعل لدينا $\text{PGCD}(28;42) = 14$ إذن $\frac{28}{42} = \frac{14 \times 2}{14 \times 3} = \frac{2}{3}$

(أي اختزلنا الكسر $\frac{28}{42}$ على 14). بالتالي $\frac{28}{42} = \frac{2}{3}$ والكسر $\frac{2}{3}$ غير قابل للاختزال.

• البحث عن القاسم المشترك الأكبر لعددين

أ) باستعمال خوارزمية الفروق المتتابعة

تمرين: احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 117 و 91.

حلّ: بتطبيق الخاصيّة $PGCD\ (a\ ;\ b) = PGCD\ (b\ ;\ a - b)$ حيث $(a > b)$ نكتب:

لدينا $117 - 91 = 26$ إذن $PGCD\ (117\ ;\ 91) = PGCD\ (91\ ;\ 26)$

و $91 - 26 = 65$ إذن $PGCD\ (91\ ;\ 26) = PGCD\ (65\ ;\ 26)$

و $65 - 26 = 39$ إذن $PGCD\ (65\ ;\ 26) = PGCD\ (39\ ;\ 26)$

و $39 - 26 = 13$ إذن $PGCD\ (39\ ;\ 26) = PGCD\ (26\ ;\ 13)$

و $26 - 13 = 13$ إذن $PGCD\ (26\ ;\ 13) = PGCD\ (13\ ;\ 13)$

و $13 - 13 = 0$ إذن $PGCD\ (13\ ;\ 13) = 13$

أخيرا $PGCD\ (117\ ;\ 91) = 13$

ملاحظة: يمكن الاكتفاء بحساب الفروق فقط، والقاسم المشترك الأكبر هو آخر فرق غير معدوم.

ب) باستعمال خوارزمية عمليات القسمات المتتابعة (خوارزمية إقليدس)

تمرين: احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 836 و 1938.

حلّ: نجري قسمات إقليدية متتابعة، ونوظف الخاصية $PGCD\ (a\ ;\ b) = PGCD\ (b\ ;\ r)$ حيث r هو باقي القسمة الإقليدية لـ a على b، نكتب: لدينا $1938 = 836 \times 2 + 266$ إذن $PGCD\ (1938\ ;\ 836) = PGCD\ (836\ ;\ 266)$

و $836 = 266 \times 3 + 38$ إذن $PGCD\ (836\ ;\ 266) = PGCD\ (266\ ;\ 38)$

و $266 = 38 \times 7 + 0$ إذن $PGCD\ (266\ ;\ 38) = 38$

ومنه $PGCD\ (1938\ ;\ 836) = 38$

ملاحظة: يمكن الاكتفاء بإنجاز عمليات القسمات الاقليدية المتتابعة، والقاسم المشترك الأكبر هو آخر باقٍ غير معدوم.

طريقة

لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين، يمكن استعمال خوارزمية الفروق المتتابعة أو خوارزمية إقليدس.

• استعمل القاسم المشترك الأكبر لكتابة كسر على الشكل غير القابل للاختزال

تمرين: اكتب الكسر $\frac{595}{560}$ على شكل غير قابل للاختزال.

حـلّ: حساب $PGCD(595;560)$. لذلك نستعمل خوارزمية إقليدس.

لدينا $595 = 560 \times 1 + 35$ ؛ $560 = 35 \times 16 + 0$ إذن $PGCD(595;560) = 35$.

بالتالي $\frac{595}{560} = \frac{595 \div 35}{560 \div 35} = \frac{17}{16}$ أي $\frac{595}{560} = \frac{17}{16}$.

طريقة

لكتابة كسر على الشكل غير القابل للاختزال، نقسم كلا من بسطه و مقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما.

دوري الآن

1) احسب $PGCD(285;45)$ ، 2) اجعل الكسر $\frac{915}{372}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

قواسم عدد طبيعي

1 اكتب المساواة التي تعبّر عن القسمة الإقليدية للعدد 1512 على العدد 21.
حدّد عندئذ حاصل وباقي هذه القسمة.

2 إليك الأعداد الطبيعية الآتية: 80 ، 120 ، 295 ، 132.
من بين هذه الأعداد، ما هي الأعداد التي تقبل القسمة على 6؟

3 عيّن كل قواسم العدد 84.

4 عيّن جميع قواسم كل من الأعداد التالية:
910 ، 1000 و 11×5.

5 أجب بصحيح أو خطأ.
8 يقسم 4، 360 يقبل القسمة على 180 ،
9 يقسم $7 \times 5 \times 3^{10} \times 2$.

6 عيّن رقم الوحدات u ورقم العشرات d في العدد 1956du.
كي يصبح قابلا للقسمة على 5 و 9 في آن واحد.
(اذكر كل الحالات الممكنة)

7 خزان ماء شكله متوازي مستطيلات ارتفاعه 1m وحجمه $30m^3$. (الوحدة 1m)
جِد كل الحالات الممكنة لبُعدَي قاعدة هذا الخزان مع العلم أنهما عددان طبيعيان.

8 ما هي قيم العدد الطبيعي a التي من أجلها يكون $\frac{18}{a}$ عددا طبيعيا؟

9 ما هي قيم العدد الطبيعي a التي من أجلها يكون $\frac{24}{a+7}$ عددا طبيعيا؟

10 عيّن قائمة قواسم كل من العددين 155 و 141.
ما هو أكبر قاسم مشترك لهما؟
ما هو أصغر قاسم لهما؟

11 عيّن كل الأعداد الطبيعية التي تتكون من ثلاثة أرقام وتقبل القسمة على 3 و على 5 في آن واحد علما أن رقم العشرات فيها يساوي 7.

12 a و b عددان طبيعيان حيث $a = 471$ و $b = 192$.
1) تحقّق من أنّ كلا من a و b يقبل القسمة على 3.
2) ماذا تستنتج بالنسبة إلى قسمة كل من $a - b$ و $a + b$ على 3؟

13 بيّن أنّ 11 من قواسم 14300.
استنتج أن 11 من قواسم 14322.

14 بيّن أنّ 7 من قواسم 217.
استنتج أن 7 من قواسم 21700000.

15 n عدد طبيعي كيفي و d قاسم مشترك للعددين a و b حيث $a = n + 19$ و $b = n + 1$.
1) احسب $a - b$.
2) استعمل خواص قواعد الأعداد الطبيعية لتبين أنّ d من قواسم 18.
3) عيّن كل الأعداد الطبيعية التي يمكن أن تكون قواسم مشتركة للعددين a و b.

16 n عدد طبيعي كيفي.
عيّن كل الأعداد الطبيعية التي يمكن أن تكون قواسم مشتركة للعددين $n + 2$ و $n + 32$.

القاسم المشترك الأكبر

17 جد في كل حالة من الحالات الآتية القواسم المشتركة للعددين a و b ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر لهما.
أ) $a = 18$ و $b = 30$ ؛ ب) $a = 27$ و $b = 36$
جـ) $a = 57$ و $b = 95$.

18 عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 112 و 120 ثم للعددين 120 و 88.
نسمي d القاسم المشترك الأكبر للعددين 112 و 120.
احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين d و 88.

19 باستعمال الفوارق المتتالية، جِد في كل حالة من الحالات الآتية القاسم المشترك الأكبر للعددين.
أ) $b = 1035$ و $a = 437$
ب) $a = 3906$ و $b = 7914$
جـ) $a = 943$ و $b = 861$
د) $a = 1111$ و $b = 111111$

20 احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين 5858 و 6767.

21 احسب $PGCD(21957;43351)$.

22 عيّن العدد الطبيعي a المحصور بين 40 و 55 والذي يحقّق $PGCD(a;15) = 5$.

العددان الأوليان فيما بينهما

23 بيّن أن العددين 143 و 153 أوليان فيما بينهما.

24 هل العددان 104 و 147 أوليان فيما بينهما؟

25 بيّن أن العددين الطبيعيين 56 و 65 أوليان فيما بينهما.

26 1) بين أن العددين الطبيعيين 23 و 29 أوليان فيما بينهما.
2) برهن أن $\frac{207}{261} = \frac{23}{29}$.
3) عيّن العدد الطبيعي a حيث $\frac{207}{261} = \frac{161}{161 + a}$.

27 بيّن بدون إجراء أي حساب ، في كل حالة من الحالات الآتية، أن العددين a و b ليسا أوليين فيما بينهما.
أ) $a = 152$ و $b = 250$ ب) $a = 18$ و $b = 135$
جـ) $a = 235$ و $b = 1840$ د) $a = 87$ و $b = 84$
هـ) $a = 12345$ و $b = 67895$.

الكسور غير القابلة للاختزال

28 اكتب كل كسر من الكسور التالية على شكل كسر غير قابل للاختزال.

$$\frac{529}{69} \ ; \ \frac{91}{28} \ ; \ \frac{707}{909} \ ; \ \frac{1111}{1919}$$

$$\frac{20418}{12190} \ ; \ \frac{42354}{10080} \ ; \ \frac{312054}{21870}.$$

29 نضع $A = \frac{n+7}{n+1}$ حيث n عدد طبيعي كيفي.
1) عيّن، في كل حالة من الحالات الآتية، الكسر غير القابل للاختزال الذي يساوي A.
$n = 13$ ؛ $n = 11$ ؛ $n = 9$
2) بيّن أن $A = 1 + \frac{6}{n+1}$.
3) استنتج قيم n التي يكون من أجلها A عددا طبيعيا.

30 n عدد طبيعي كيفي.
هل الكسر $\frac{n}{n+1}$ غير قابل للاختزال؟ علّل.

31 هل الكسر $\frac{35n+7}{55n+11}$ غير قابل للاختزال من أجل كل عدد طبيعي n ؟ علل.

32 احسب وأعط النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.

$$A = \frac{2}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{8}{21} \ ; \ B = \left(\frac{7}{6} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{4}{5}$$

$$C = 10 \div \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{7}\right) \ ; \ D = \frac{2}{3} - \frac{14}{3} \div \frac{5}{24}$$

33 احسب وأعط النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.

$$A = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} \qquad B = \frac{24}{25} \times \frac{\frac{5}{8} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{3}{4}}$$

34 1) هل العددان 1005 و 315 أوليان فيما بينهما؟ علّل.
2) إذا كانت الإجابة «لا»، احسب عندئذ القاسم المشترك الأكبر لهما.
3) اكتب الكسر $\frac{1005}{315}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

35 1) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 210 و 441.
2) اكتب الكسر $\frac{441}{210}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

36 1) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 496 و 806.
2) أكتب الكسر $\frac{496}{806}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.
3) احسب الفرق $\frac{496}{806} - \frac{3}{26}$ ثم اكتب النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.

37 a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $162\,a = 45\,b$.
1) عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 45 و 162.
2) اكتب الكسر $\frac{a}{b}$ على الشكل كسر غير قابل للاختزال.

38 إليك العدد A حيث $A = \frac{5175}{3825} + \frac{19}{17}$.
1) احسب $PGCD(5175 \ ; 3825)$.
2) اكتب الكسر $\frac{5175}{3825}$ على الشكل غير القابل للاختزال.
3) استنتج كتابة للعدد A على الشكل $b + \frac{c}{d}$
حيث b ، c و d أعداد طبيعية مع b أكبر ما يمكن و c أصغر ما يمكن.

39 اختبرت ليلى قواعد قابلية القسمة على 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 9 و 10 فلاحظت أن كلا من العددين 253 و 407 لا يقبلان القسمة على هذه الأعداد.
عندئذ، استنتجت أن العددين 253 و 407 أوليان فيما بينهما.
هل توافقها؟ علّل.
إذا كانت الإجابة «لا»، اقترح طريقة مناسبة لذلك.

40 1) احسب $PGCD(19251;22816)$.
2) اكتب الكسر $\frac{22816}{19251}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة	الإجابات (1)	(2)	(3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	في القسمة الإقليدية للعدد 72 على 5 ...	حاصل القسمة يساوي 14 و الباقي 2	حاصل القسمة هو 2 و الباقي 14	حاصل القسمة هو 72 والباقي 5	10
2	في القسمة الإقليدية للعدد 84 على 12...	حاصل القسمة هو 7 والباقي 12	حاصل القسمة هو 7 والباقي 0	حاصل القسمة هو 7 والباقي 10	10
3	قواسم العدد 121 هي...	11 ؛ 121	1 ؛ 11	1 ؛ 11 ؛ 121	10 و 11
4	قواسم العدد 34 هي...	1 ؛ 2 ؛ 17 ؛ 34	2 ؛ 17	1 ؛ 2 ؛ 17	10 و 11
5	قواسم العدد 7×2^3 هي...	2 ؛ 7	1 ؛ 2 ؛ 4 ؛ 8 ؛ 7 ؛ 14 ؛ 28 ؛ 56	8 ؛ 7	10 و 11
6	القواسم المشتركة للعددين 15و28 هي...	1	1 ؛ 15 ؛ 28	1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 7	10
7	القواسم المشتركة للعددين 3×2^3 و 2×3^3 هي...	1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 6	2 ؛ 3	8 ؛ 27	10
8	القاسم المشترك الأكبر للعددين 29 و 39 هو...	1	10	29	12 و 13
9	من المساواة $125 = 75 \times 1 + 50$ ينتج أن...	PGCD(125;75) = 1	PGCD(125;75)= PGCD(75;50)	PGCD(125;75)=50	12 و 13

أدمج تعلّماتي

وضعية

تحصّل خبير على مشروع ترميم واجهة مَعْلَم تاريخي.
تتمثل الأعمال التي طُلِبَ من هذا الخبير إنجازها في تغطية واجهة هذا المَعْلَمْ باستعمال قِطع خزفية متماثلة، عددها لا يفوق 2443 حيث رقما العشرات والمئات متساويان ويساويان ضعف رقم الآلاف.
إذا قسّم هذا الخبير الكمية الإجمالية على 4 أو 8 أو 10 حِرَفيّين في فن الخزف لا تبقى عنده أية قطعة. ما هو عدد القطع الخزفية التي سيستعملها هذا الخبير لتغطية الواجهة؟
مساعدة : كل عدد مضاعف للعدد 10 رقم أحاده 0.

تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: المطلوب البحث عن عدد أصغر من 2443، مضاعف للأعداد 4 ، 8 ، 10 ، رقما عشراته و مئاته متساويان وكلاهما مضاعف لرقم آلاف هذا العدد .

تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل مناسبة: العدد من رتبة عشرات الآلاف (مشكّل من أربعة أرقام) ، استعمال قابلية القسمة على 10 (ماذا يميّز الأعداد التي تقبل القسمة على 10؟) ، التجريب على أعداد ، الترميز لأرقام هذا العدد بحروف،...

تنفيذ استراتيجية الحل: • التجريب على أعداد مشكّلة من أربع مراتب وتقبل القسمة على كل من 8، 10، 8 وأصغر من 2443.
• كتابة العدد المطلوب على الشكل $1000a + 100b + 10c + d$ وتطوير الفكرة باستغلال باقي المعطيات.

41 أ) تحقق أن كل عدد من الأعداد 111، 222، 333 يقبل القسمة على 37.

ب) نريد فيما يلي إثبات أن كل عدد مكتوب على الشكل aaa يقبل القسمة على 37.

• أثبت أنّ $aaa = 111a$.

• استنتج أن aaa يقبل القسمة على 37.

42 يحتوي فندقان على 105 غرفة و 84 غرفة على الترتيب. يحتوي كل طابق من طوابق الفندقين معا على نفس عدد الغرف. ما هو أكبر عدد ممكن من الغرف التي يمكن أن يحتوي عليها كل طابق؟ في هذه الحالة، احسب عدد طوابق كل فندق من الفندقين.

43 لحساب $a = 3 \times 17 - \frac{5}{7}$ بحاسبة :

• نحجز 17×3 ونضغط على = ثم على M+ لإضافة الناتج لمحتوى الذّاكرة.

• نضغط على CE/C لمحو الشاشة.

• نحجز $\frac{5}{7}$ ونضغط على = ثم على M- لطرح $\frac{5}{7}$ من محتوى الذّاكرة.

• نضغط على MRC (أو MR) لإظهار محتوى الذّاكرة أي قيمة a.

استعمل حاسبة لحساب $7 \times 11 + (17 + 15) - \frac{3}{8} + \frac{5}{4}$.

44 نعتبر العددين: $A = \frac{6}{7} - \frac{4}{7} \times \frac{5}{2}$ و $B = \dfrac{\frac{3}{4} - 4}{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$.

1) اكتب A على شكل كسر غير قابل للاختزال.

2) اكتب B على شكل عدد نسبي صحيح.

45 استعمال حاسبة لحساب المجموع $7 + \frac{1}{9999999999}$. وماذا تستنتج؟

46 من امتحان شهادة التعليم المتوسط

1) أحسب القاسم المشترك الاكبر للعددين 140 و 220.

2) صفيحة زجاجية مستطيلة الشكل بعداها 1,40m و 2,20m. جُزئت إلى مربعات متساوية بأكبر ضلع دون ضياع

أ) ما هو طول ضلع كل مربع .

ب) ما هو عدد المربعات الناتجة ؟

47 فاز تلميذ في مسابقة و تحصّل على 62 حبة حلوى بنكهة الليمون و 93 حبة حلوى بنكهة الفراولة، وكونهُ سخيا جدًا قام بتوزيعها على كل تلاميذ قسمه بحيث تحصّل كل تلميذ على العدد نفسه من الحلويات من كل نوع.
احسب عدد تلاميذ هذا القسم و حصة كل تلميذ.

48 عندما نقسم العدد الطبيعي a على 6 نجد الباقي يساوي حاصل القسمة. عيّن كل قيم a.

49 مساحة قطعة قماش مستطيلة الشكل هي $60cm^2$.
ما هما بُعداها، علمًا أنهما عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما؟

50 1) أ) اختبر قابلية قسمة الأعداد 1845، 234، 308 على كل من: 2 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 9.

ب) استناد إلى نتائج السؤال السابق، هل الكسرين $\frac{234}{1845}$ ، $\frac{308}{234}$ غير قابلين للاختزال؟ برّر جوابك.

2) أ) استنادا إلى نتائج السؤال 1) أ) ، هل يمكن القول إنّ الكسر $\frac{308}{1845}$ غير قابل للاختزال؟

ب) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 302 و 1854.

جـ) هل الكسر $\frac{308}{1845}$ قابل غير قابل للاختزال؟

51 a عدد طبيعي، عيّن a إذا علمت أن $PGCD(a + 24; a) = 12$.

52 1) هل العددان 105 و 130 أوليان فيما بينهما؟ برّر جوابك.

2) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 105 و 130.

3) اكتب $\frac{105}{130}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

53 حقل مستطيل الشكل طوله 102m وعرضه 78m.
أراد صاحبه وضع أعمدة و تثبيت سياج حوله، بحيث تكون المسافة التي تفصل كل عمودين متتاليين ثابتة.

1) ما هي أكبر مسافة يختارها صاحب الحقل بين كل عمودين متتاليين؟

2) ما هو عدد هذه الأعمدة؟

54 بمناسبة نهاية الاختبارات الفصلية، نظمت متوسطة رحلة سياحية واستكشافية إلى حديقة التجارب الواقعة في الحامة، بمدينة الجزائر العاصمة.
قبل التنقل إلى هذا المكان، تمّ إحصاء 208 تلاميذ من بينهم 88 ولدا ثمّ شُكلّت أفواج متجانسة بها أصغر عدد من التلاميذ، ويرافق كل فوج أستاذ واحد.

حديقة التجارب بالحامة

1) ما هو عدد الأساتذة اللازم لتأطير هذه الرحلة؟

2) جد عدد تلاميذ كل فوج.

55 طلب مقاول من حِرَفيّ في الرخام أن يحضّر له صفيحة رخامية مستطيلة الشكل طولها 4,95m وعرضها 3,15m ثم كلّفه بتقسيمها إلى مربعات متماثلة ذات أكبر ضلع ممكن و بدون ضياع أية قطعة من الصفيحة.

1) ما هو طول ضلع كل قطعة مربعة؟

2) ما هو عدد المربعات المحصل عليها؟

استعمال مجدول لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين

نشاط: استعمال مجدول لحساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 273 ، 195 بتوظيف:

أ) خوارزمية الفروق المتتابعة. ب) خوارزمية إقليدس (القسمات المتتابعة).

توجيهات

أ) 1) افتح المجدول (إكسال)، وحضّر ورقة حساب مثل الموالية:

	A	B	C	D	E	F
1	حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b باستعمال عمليات الطرح المتتالية					
2	a	b	الفرق $(a - b)$			
3	273	195				

2) احجز الطلبيات الآتية:

في الخلية C3 الطلبية A3 - B3 =

في الخلية A4 الطلبية =MAX(B3;C3)

في الخلية B4 الطلبية =MIN(B3;C3)

في الخلية C4 الطلبية A4 - B4 = فيظهر:

	A	B	C	D	E	F
1	حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b باستعمال عمليات الطرح المتتالية					
2	a	b	الفرق $(a - b)$			
3	273	195	78			
4	195	78	117			

3) انقل محتوى الخلايا A4 ، B4 ، C4 بالسحب نحو الأسفل سطرا بعد سطر حتى تحصل على صفر في العمود C.

4) أكمل ما يأتي .... = PGCD(273 ; 195)

ب) 1) حضّر ورقة حساب بحجز الطلبية الآتية:

في الخلية C3 الطلبية =MOD(A3;B3)

في الخلية A4 الطلبية =A3

في الخلية B4 الطلبية =B3

في الخلية C4 الطلبية =MOD(A4;B4) فيظهر:

	A	B	C	D	E
1	حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b باستعمال عمليات القسمة المتتالية				
2	a	b	باقي قسمة a على b		
3	273	195	78		
4	195	78	39		

2) انقل محتوى الخلايا A4 ، B4 ، C4 بالسحب نحو الأسفل سطرا بعد سطر حتى تحصل على صفر في العمود C.

3) أكمل ما يأتي .... = PGCD(273 ; 195)

تعاليق

• يستدعي تطبيق هذه الخوارزمية $a > b$

• الطلبية MAX (B3 ; C3) = تعني أكبر العددين المحجوزين في الخليتين B3 و C3.

• الطلبية MIN (B3 ; C3) = تعني أصغر العددين المحجوزين في الخليتين B3 و C3.

• لنَقْلِ محتوى خلايا في مجدول: نحدّد الخلية أو الخلايا المراد نقل محتواها، ثمّ نحرك المؤشر على الرأس الأيمن السفلي من إطار حيز التحديد حتى يتحول إلى + ثم نضغط على يسار الفأرة مع السحب حتى الخانة المستهدفة.

• الطلبية MOD (A3 ; B3) = تعني باقي القسمة الإقليدية للعدد المحجوز في الخلية A3 على العدد المحجوز في الخلية B3

• الطلبية A3 = إظهار القيمة المحجوزة في الخلية A3.

لاحظ ما يحدث عند حجز 195 في الخلية A3 و 273 في الخلية B3.

دوري الآن

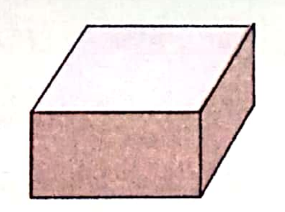
1) استعمل مجدولا لحساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 702 ، 534 مرّة بتوظيف خوارزمية الفروق المتتابعة، ومرّة أخرى خوارزمية إقليدس (القسمات المتتابعة).

2) قارن بين عدد خطوات كل خوارزمية.

2 الحساب على الجذور

سأتعلَّم في هذا الباب

- تعريف الجذر التربيعي لعدد موجب.
- معرفة قواعد الحساب على الجذور التربيعية واستعمالها لتبسيط عبارات تتضمن جذورا تربيعية.



أسرار العدد الذهبي: العدد الذهبي الذي يرمز له عادة بالرمز φ ، يساوي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ وقيمته بالتقريب إلى الجزء من 1000 هي 1,618.
لتفسير هذا العدد هندسيا، نعتبر مستطيلا طوله L وعرضه ℓ ، حيث يتميز هذا المستطيل بتناسب ضلعيه وفق العدد الذهبي. يستعمل هذا التناسب في اللوحات الفنية التشكيلية مما يضفي عليها طابعا جماليا مميزا. يعتقد أن الإغريق قد اكتشفوا هذا العدد في القرن السادس عشر قبل الميلاد، حيث نجد أن المبنى العريق المسمى«البرتينيون» (Parthénon) الذي أنجزه المهندس المعماري Phidias في القرن الخامس قبل الميلاد، يتشكل من مستطيلات بعداها L و ℓ يحققان $\frac{L}{\ell}=\varphi$.

تحدٍّ

أراد فلّاح بناء خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة، ارتفاعه 1,80m وسعته $36m^3$. ساعد هذا الفلاح على إيجاد طول ضلع قاعدة الخزان.
(تعطى النتيجة مدورة إلى 1cm)

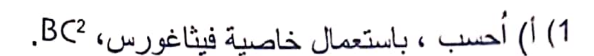
أستعدّ

أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

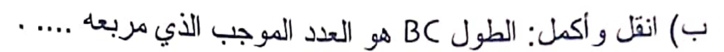
1) مربع العدد 4 هو 8.
2) مربع العدد 5- هو 25-.
3) العدد 36 هو مربع العدد الوحيد 6.
4) إذا حجزنا على الآلة الحاسبة: $\sqrt{\ }$ 9، يظهر على الشاشة العدد 81.
5) a و b عددان. العدد $(ab)^2$ يساوي $a^2 \times b^2$.
6) a و b عددان حيث $b \neq 0$. العدد $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ يساوي $\frac{a^2}{b}$.
7) a و b عددان. العدد $(a+b)(a+b)$ يُنشر على الشكل a^2+b^2 .
8) a و b عددان. العدد $(a-b)(a-b)$ ينشر على الشكل $a^2-2ab+b^2$.
9) a و b عددان. العدد $(a+b)(a-b)$ ينشر على الشكل a^2-b^2 .
10) ABC مثلث حيث AB = 4cm ، AC = 3cm و BC = 5cm
إذن المثلث ABC قائم في A.

1 الجذر التربيعي لعدد موجب

وحدة الطول هي السنتيمتر. والشكل ليس بالأطوال الحقيقية.



1) أ) أُحسب ، باستعمال خاصية فيثاغورس، BC^2.



ب) انقل وأكمل: الطول BC هو العدد الموجب الذي مربعه .... .

2) تعطي اللمسة $\sqrt{\ }$ في الحاسبة القيمة المضبوطة أو قيمة مقربة لعدد عُلِمَ مربّعه.

أ) تأكد أنّه عند استعمال الحاسبة لإيجاد الطول BC تظهر على الشاشة القيمة 2,236067978.

ب) تقول إيمان: « إنّ 2,236067978 ليست القيمة المضبوطة للعدد الذي مربّعه 5». هل توافقها؟ اشرح.

نرمز بـ $\sqrt{5}$ للقيمة المضبوطة للعدد الموجب الذي مربعه 5، ونقرأ: الجذر التربيعي للعدد 5.

3) أُكتب، باستعمال الرمز $\sqrt{\ }$، الجذر التربيعي لكل من الأعداد 36، 81، 0,49، أعط الناتج ذهنيا.

4) أُنقل وأتمم ما يلي: أ) $\sqrt{2^2} = ...$ ، $\sqrt{3}^2 = ...$ ، $\sqrt{5^2} = ...$ ، $(\sqrt{5})^2 = ...$.

ب) $\sqrt{a^2} = ...$ و $(\sqrt{a})^2 = ...$ (علما أنّ a عدد موجب).

2 الأعداد الناطقة والأعداد غير الناطقة

تم تصنيف الأعداد $\sqrt{100}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{13}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{\frac{25}{9}}$ ، $\sqrt{\frac{16}{13}}$ ، $\sqrt{0,25}$ ، $\sqrt{6}$ كما يلي:

الصنف الأول: $\sqrt{100}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{\frac{16}{9}}$ ، $\sqrt{0,25}$. **الصنف الثاني:** $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{13}$ ، $\sqrt{\frac{25}{13}}$ ، $\sqrt{6}$.

أ) إلى أي الصنفين ينتمي العدد $\sqrt{169}$ ؟ برّر إجابتك.

ب) ما هي معايير التصنيف السابق؟

3 المعادلات من الشكل $x^2 = a$

1) أ) أُنقل وأتمم الجدول الآتي:

x	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2
x^2	...	...	...	...	...	...

ب) ضع تخمينا حول مربعي عددين متعاكسين.

جـ) أثبت صحة التخمين الذي وضعته من أجل كل عددين b و $-b$.

2) أ) لحل المعادلة $x^2 = 9$ ، قال مراد:« إنّ حل المعادلة $x^2 = 9$ هو 3، لأنّ $3^2 = 9$».

وقال عمر:« لقد نسي مراد حلا آخر». هل توافقه؟ اشرح.

ب) حل، إن أمكن، كلا من المعادلات الآتية:

$x^2 = 25$ ، $x^2 = 3$ ، $x^2 = 0$ ، $x^2 = 0,04$ ، $x^2 = -9$.

3) أُكتب معادلة من الشكل $x^2 = a$ في كل حالة مما يلي:

أ) حلاّها هما: 7 و -7. ب) حلاّها هما: $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$. جـ) حلاّها هما: 0,5 و -0,5.

ماذا تستنتج؟

4 العمليات على الجذور التربيعية

• جداء جذرين تربيعيين

1) انقل وأكمل الجدول الآتي:

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$a\times b$	$\sqrt{a\times b}$
4	36					
9	25					
0,16	49					

2) ضع تخمينا حول العلاقة بين $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ و $\sqrt{a\times b}$.

3) لإثبات صحة التخمين الذي وجدناه في السؤال (2) من أجل كل عددين موجبين a و b :

أ) برّر أنّ كلا من العددين $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ و $\sqrt{a\times b}$ موجب.

ب) انقل وأتمم ما يلي $(\sqrt{a\times b})^2 = ...$ و $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2 = (...)^2\times(...)^2 = ...\times ...$.

ج) استنتج العلاقة بين $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ و $\sqrt{a\times b}$.

• حاصل قسمة جذرين تربيعيين

1) انقل وأكمل الجدول الآتي:

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\frac{a}{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
36	4					
25	100					
0,09	0,81					
-25	-100					

2) ضع تخمينا حول العلاقة بين $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

3) لإثبات صحة التخمين الذي وجدناه في السؤال (2) من أجل كل عددين موجبين a و b و $b\neq 0$:

أ) برّر أنّ كلا من العددين $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}$ موجب.

ب) انقل وأتمم ما يلي $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = ...$ و $... = \frac{(...)^2}{(...)^2} = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$. ج) استنتج العلاقة بين $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

• مجموع جذرين تربيعيين وفرقهما

أ) احسب كلا من العددين $\sqrt{16+9}$ و $\sqrt{16}+\sqrt{9}$. ماذا تستنتج ؟

احسب كلا من العددين $\sqrt{100-36}$ و $\sqrt{100}-\sqrt{36}$. ماذا تستنتج؟

ب) a و b عددان موجبان حيث $a\geq b$

هل يمكن أن يكون $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ علّل إجابتك. نفس السؤال بالنسبة إلى العددين $\sqrt{a-b}$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ؟

1 الجذر التربيعي لعدد موجب

تعريف

a عدد موجب.

الجذر التربيعي للعدد a هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a.

نرمز للجذر التربيعي للعدد a بالرمز $\sqrt{a}$ ونقرأ: «الجذر التربيعي لـ a».

مثال

- $\sqrt{4} = 2$ لأن 4 عدد موجب و $2^2 = 4$.

كذلك $\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{0} = 0$ ، $\sqrt{1} = 1$.

- $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$ لأن $\frac{5}{3}$ عدد موجب و $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$
- $\sqrt{0,04} = 0,2$ لأن 0,2 عدد الموجب و $(0,2)^2 = 0,04$.
- $\sqrt{7}$ هو العدد الموجب الذي مربعه 7.

$\sqrt{7}$ ليس عددا ناطقا، لأنه لا يوجد عدد ناطق مربعه 7.

خواص

a عدد موجب.

- $\sqrt{a}$ هو العدد الموجب الذي مربعه a.

أي $(\sqrt{a})^2 = a$.

- $\sqrt{a^2}$ هو العدد الموجب الذي مربعه a^2.

أي $\sqrt{a^2} = a$.

مثال

- $(\sqrt{5})^2 = 5$ ، $(\sqrt{1,7})^2 = 1,7$ ، $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$.
- $\sqrt{3^2} = 3$ ، $\sqrt{21,6^2} = 21,6$ ، $\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\right)^2 = \frac{4}{7}$.

2 الأعداد الناطقة والأعداد غير الناطقة

a عدد ناطق موجب.

- في حالة a مربعا لعدد ناطق، يكون $\sqrt{a}$ عددا ناطقا.
- في حالة a ليس مربعا لعدد ناطق، فإنّ $\sqrt{a}$ ليس عددا ناطقا.

مثال

- نعلم أن $\frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

إذن $\sqrt{\frac{25}{9}}$ عدد ناطق، ولدينا $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

- نعلم أنّه لا يوجد عدد ناطق مربعه 6.

إذن $\sqrt{6}$ عدد غير ناطق.

3 المعادلات من الشكل $x^2 = a$

خاصية 1

a عدد موجب.

- يوجد عددان متعاكسان هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ مربع كل منهما يساوي a.

ملاحظة: مربع أي عدد هو دائما عدد موجب.

ملاحظة: $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$

$(-\sqrt{a}) \times (-\sqrt{a}) = (-\sqrt{a})^2 = a$

العدد $-\sqrt{a}$ هو معاكس العدد الموجب $\sqrt{a}$

مثال

$5^2 = 5 \times 5 = 25$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

خاصية 2

a عدد كيفي.

- إذا كان $a > 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ تقبل حلين متعاكسين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.
- إذا كان $a = 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ تقبل حلا واحدا وهو العدد 0.
- إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لا تقبل أي حل.

مثال

- المعادلة $x^2 = 9$ تقبل حلين هما 3- و 3.
- المعادلة $x^2 = 5$ تقبل حلين هما $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$.
- المعادلة $x^2 = -1$ لا تقبل أي حل.

• حل معادلة من الشكل $x^2 = a$ حيث a عدد معطى

تمرين

حل كل معادلة من المعادلات الآتية:

أ) $x^2 = 5$. ب) $x^2 = \frac{1}{4}$. جـ) $x^2 = -9$.

حل

أ) حل المعادلة $x^2 = 5$: $x^2 = 5$ يعني $x^2 = (\sqrt{5})^2$ بالتالي $x = \sqrt{5}$ أو $x = -\sqrt{5}$.

ب) حل المعادلة $x^2 = \frac{1}{4}$: $x^2 = \frac{1}{4}$ يعني $x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ بالتالي $x = \frac{1}{2}$ أو $x = -\frac{1}{2}$.

جـ) حل المعادلة $x^2 = -9$: من أجل كل عدد x، $x^2 \geq 0$ و $-9 < 0$ بالتالي لا يوجد أي عدد x يحقق $x^2 = -9$

إذن المعادلة $x^2 = -9$ لا تقبل أي حل.

طريقة

لحل معادلة من الشكل $x^2 = a$ حيث a عدد معطى، نحدد إشارة العدد a.

إذا كان $a > 0$، نكتب المعادلة $x^2 = a$ على الشكل $x^2 = (\sqrt{a})^2$ ثم نعيّن حلي المعادلة $x^2 = a$.

• استعمال تعريف الجذر التربيعي لإنجاز حساب

تمرين: احسب مايلي: أ) $1 - 4b^2 + \sqrt{16b^4}$ (b عدد كيفي)

ب) $\sqrt{0,81} \times \sqrt{(-0,03)^2}$

جـ) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + 1$

حل: أ) لدينا $\sqrt{16b^4} = \sqrt{(4b^2)^2} = 4b^2$ لأن $4b^2$ هو دائما عدد موجب

إذن $1 - 4b^2 + \sqrt{16b^4} = 1 - 4b^2 + 4b^2 = 1$.

$\sqrt{a^2} = a$ عندما $a \geq 0$.

ب) لدينا $(-0,03)^2 = (0,03)^2$ و $0,81 = 0,9^2$

إذن $\sqrt{0,81} \times \sqrt{(-0,03)^2} = \sqrt{0,9^2} \times \sqrt{0,03^2} = 0,9 \times 0,03 = 0,027$.

جـ) لاحظ أن $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ لا يساوي $1 - \sqrt{2}$ لأن العدد $1 - \sqrt{2}$ سالب.

لدينا $1 - \sqrt{2} = -(\sqrt{2} - 1)$ و $(1-\sqrt{2})^2 = [-(\sqrt{2}-1)]^2$.

إذن $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2} - 1$ لأن العدد $\sqrt{2} - 1$ موجب.

$b^2 = (-b)^2$ من أجل كل عدد b

ونستنتج أن $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + 1 = (\sqrt{2} - 1) + 1 = \sqrt{2}$.

دوري الآن

1 1) احسب ما يلي:
$\sqrt{(3,301-\pi)^2} + \sqrt{(3,141-\pi)^2}$.

2 حل كل معادلة مما يلي:
$-x^2 = 2$ ، $2x^2 - 6 = 0$ ، $x + 1 - x^2 = x$

4 العمليات على الجذور التربيعية

خاصية 1

من أجل كل عددين موجبين a و b

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$.

مثال

- $\sqrt{12}\times\sqrt{3}=\sqrt{12\times3}=\sqrt{36}=6$.
- $\sqrt{28}=\sqrt{4\times7}=\sqrt{4}\times\sqrt{7}=2\sqrt{7}$.
- $\sqrt{0,9}\times\sqrt{0,4}=\sqrt{0,9\times0,4}$
  $=\sqrt{0,36}=0,6$.

ملاحظة 1

1) تسمح الخاصية 1 بالانتقال من الكتابة $\sqrt{a\times b}$ إلى الكتابة $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ والعكس.

2) من أجل كل عددين موجبين a و b

$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

3) في حالة a و b عددين سالبين فإنّ $\sqrt{a\times b}$ موجود مع أنّ كلا من $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ لا معنى له.

مثال

- لدينا $63=9\times7=3^2\times7$
  إذن $\sqrt{63}=\sqrt{9\times7}=\sqrt{3^2\times7}=3\sqrt{7}$.
- لدينا $\sqrt{(-9)\times(-4)}=\sqrt{36}=6$

خاصية 2

من أجل كل عددين موجبين a و b حيث $b\neq0$.

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

مثال

- $\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{60}{15}}=\sqrt{4}=2$.
- $\sqrt{\dfrac{25}{9}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}=\dfrac{5}{3}$.
- $\sqrt{\dfrac{7}{36}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{36}}=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$.
- لدينا $\sqrt{\dfrac{-36}{-4}}=\sqrt{9}=3$

ملاحظة 2

في حالة a و b عددين سالبين فإنّ $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ موجود مع أنّ كلا من $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ لا معنى له.

ملاحظة 3

المساواة غير محققة في كل من الجمع والطرح على الجذور التربيعية، أي:

a و b عددان موجبان تماما.

- $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
- $\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$ حيث $(a>b)$

مثال

- $\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}$
  لأن $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$
  $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$
- $\sqrt{100-36}\neq\sqrt{100}-\sqrt{36}$
  لأن $\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$
  $\sqrt{100}-\sqrt{36}=10+6=4$

• توظيف خواص الجذور التربيعية

تمرين 1 : 1) أكتب كلا من الأعداد $\sqrt{8}$ ، $\sqrt{18}$ و $\sqrt{50}$ على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر ما يمكن.

2) استنتج عبارة مبسطة للعدد A حيث $A=\sqrt{8}-3\sqrt{18}+2\sqrt{50}-7\sqrt{2}$.

حل : 1) لدينا $\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=\sqrt{2^2\times2}=2\sqrt{2}$ ، $\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=\sqrt{3^2\times2}=3\sqrt{2}$

و $\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=\sqrt{5^2\times2}=5\sqrt{2}$.

2) تبسيط A

نستنتج من 1) أن $A=2\sqrt{2}-3(3\sqrt{2})+2(5\sqrt{2})-7\sqrt{2}$ أي $A=2\sqrt{2}-9\sqrt{2}+10\sqrt{2}-7\sqrt{2}$

ثم نطبق الخاصية التوزيعية ونجد: $A=(2-9+10-7)\sqrt{2}$ أي $A=-4\times\sqrt{2}$ أي $A=-4\sqrt{2}$.

طريقة

لكتابة الجذر التربيعي لعدد طبيعي n على الشكل $a\sqrt{b}$، حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر ما يمكن.

نبحث عن أكبر مربع a^2 يقسم n، $n=a^2\times b$.

لتبسيط العبارة $x\sqrt{b}+y\sqrt{b}+z\sqrt{b}$ نطبق الخاصية التوزيعية: $x\sqrt{b}+y\sqrt{b}+z\sqrt{b}=(x+y+z)\sqrt{b}$.

تمرين 2: احسب $A=\sqrt{\frac{50}{3}}\times\sqrt{2}\times\sqrt{12}$

حل: لدينا $A=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{3}}\times\sqrt{2}\times\sqrt{12}=\frac{\sqrt{50}\times\sqrt{2}\times\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

وبما أن $\sqrt{50}\times\sqrt{2}=\sqrt{50\times2}=\sqrt{100}=10$ و $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$ فإن $A=\frac{10\times2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=20$

• نسبة مقامها عدد غير ناطق

تمرين: اكتب على شكل نسبة مقامها عدد ناطق كلا من $\frac{2}{\sqrt{11}}$ و $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}}$.

حل : لدينا $\frac{2}{\sqrt{11}}=\frac{2\times\sqrt{11}}{\sqrt{11}\times\sqrt{11}}=\frac{2\sqrt{11}}{11}$ و $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{35}}{2\times5}=\frac{\sqrt{35}}{10}$.

طريقة

لتحويل نسبة $\frac{a}{\sqrt{b}}$ مقامها عدد غير ناطق إلى نسبة تساويها مقامها عدد ناطق، نضرب كلا من البسط والمقام في نفس العدد $\sqrt{b}$.

دوري الآن

1 نضع: $B=\sqrt{250}-\sqrt{490}+2\sqrt{81}$

اكتب B على الشكل $a+b\sqrt{c}$ حيث a و b عددان صحيحان و c عدد طبيعي أصغر ما يمكن.

2 أكتب كل عدد مما يلي على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

$\frac{4}{\sqrt{7}}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ و $\frac{8}{5\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{8}}$.

استعمال تعريف الجذر التربيعي

1 انقل و أتمم الجمل الآتية:

144 هو مربع العدد ...

13 هو الجذر التربيعي للعدد ...

100 هو مربع العدد ...

2,5 هو الجذر التربيعي للعدد ...

... هو مربع العدد 25.

... هو الجذر التربيعي للعدد 25.

2 اكتب العبارة المناسبة : «هو مربع العدد» أو «هو الجذر التربيعي للعدد» مكان النقط.

$0,8 \ldots 0,64$ ، $64 \ldots 8$ ، $\frac{1}{49} \ldots \frac{1}{7}$ ، $(-1)^2 \ldots 1$

$0,0001 \ldots 0,01$ ، $0,09 \ldots 0,3$

3 اكتب كل عدد من الأعداد التالية كتابة عشرية.

$\sqrt{81}$ ، $\sqrt{289}$ ، $\sqrt{0,04}$ ، $\sqrt{1,44}$ ، $\sqrt{1,21}$

$\sqrt{0,0001}$ ، $\sqrt{6,25}$

4 اكتب كل عدد من الأعداد التالية على شكل عدد طبيعي.

$\sqrt{(-1)^2}$ ، $\sqrt{0}$ ، $\sqrt{(-1)^6}$ ، $\sqrt{-(-49)}$

5 اكتب كل عدد من الأعداد التالية على شكل قوة للعدد 10

$\sqrt{10^2}$ ، $\sqrt{10^4}$ ، $\sqrt{10^6}$ ، $\sqrt{10^{-6}}$ ، $\sqrt{10^{10}}$

$\sqrt{10^{-20}}$ ، $\sqrt{10^{-100}}$

6 احسب مربع كل عدد مما يلي:

$\sqrt{0,01}$ ، $\sqrt{14}$ ، $\sqrt{25}$ ، $\sqrt{400}$ ، $\sqrt{909}$ ، $\sqrt{2019}$

7 احسب مربع كل عدد مما يلي:

$\sqrt{\frac{1}{9}}$ ، $\sqrt{\frac{100}{49}}$ ، $\sqrt{\frac{1}{25}}$ ، $-\sqrt{17}$

8 اكتب الأعداد الآتية دون استعمال الرمز $\sqrt{\ }$.

$\sqrt{(14,2)^2}$ ، $\sqrt{(-3,5)^2}$ ، $\sqrt{\pi^2}$ ، $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ،

$\sqrt{(\pi-5)^2}$ ، $\sqrt{(\pi-2)^2}$

حساب قيم تقريبية

9 عين القيمة المقربة إلى الجزء من 10 بالنقصان والقيمة المقربة إلى الجزء من 10 بالزيادة لكل عدد مما يلي:

$\sqrt{43}$ ، $\sqrt{16,5}$ ، $\sqrt{8}$ ، $13+\sqrt{7}$ ، $13-\sqrt{7}$ ،

$\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، $2\sqrt{3}-2$

10 مساحة مربع هي $12cm^2$.

احسب المدوّر إلى الجزء من 10 لطول ضلع هذا المربع.

حل معادلات من الشكل $x^2 = a$

11 حل كل معادلة مما يلي:

$x^2 = 81$ ، $x^2 = 2,89$ ، $x^2 = 361$ ،

$x^2 = 0$ ، $x^2 = -16$.

12 حل كل معادلة مما يلي:

$x^2 = 2$ ، $x^2 = 1$ ، $x^2 = -1$ ، $x^2 = (-1)^2$ ، $x^2 = \frac{1}{4}$ ،

$x^2 = \frac{48}{49}$.

13 حل كل معادلة مما يلي:

$3 - x^2 = 0$ ، $3 + x^2 = 0$ ، $1 - 9x^2 = 0$.

14 1) لتكن العبارة $A = x(x-5) + 5(x+2) + 6$.

أ) انشر العبارة A وبسّطها.

ب) عيّن قيم x التي تكون من أجلها $A = 0$.

2) أجب عن السؤالين السابقين نفسهما من أجل العبارة

$A = (x-7)(x+4) + 3x + 21$.

استعمال المساواة $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$

15 احسب ما يلي:

$\sqrt{9 \times 81}$ ، $\sqrt{121 \times 100}$ ، $\sqrt{16 \times 900}$

$\sqrt{10^2 \times 10^4}$ ، $\sqrt{\frac{1}{4} \times 10^6}$ ، $\sqrt{1,44 \times 0,25}$.

16 احسب ما يلي:

$\sqrt{0,01 \times 64}$ ، $\sqrt{0,81 \times 0,0001}$

$\sqrt{2,56 \times 0,16}$ ، $\sqrt{5,76 \times 0,0144}$.

17 احسب ما يلي:

$\sqrt{3}\times\sqrt{48}$ ، $\sqrt{32}\times\sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}\times\sqrt{50}$

$\sqrt{0{,}04\times 0{,}09}$ ، $\sqrt{125}\times\sqrt{5}$.

استعمال المساواة $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

18 اكتب كل عدد مما يلي على الشكل $a\sqrt{b}$

حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر ما يمكن.

$\sqrt{300}$ ، $\sqrt{288}$ ، $\sqrt{75}$ ، $\sqrt{32}$ ، $\sqrt{8}$

$\sqrt{6250}$ ، $\sqrt{363}$.

19 اكتب كل عدد مما يلي على الشكل $\sqrt{n}$ حيث n عدد طبيعي.

$2\sqrt{7}$ ، $5\sqrt{5}$ ، $7\sqrt{2}$ ، $2\sqrt{5}$ ، $4\sqrt{3}$

$0{,}9\sqrt{100}$ ، $4\sqrt{0{,}25}$ ، $3\sqrt{27}$.

استعمال المساواة $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

20 اكتب كل عدد مما يلي على شكل كسر.

$\sqrt{\frac{12100}{900}}$ ، $\sqrt{\frac{1}{324}}$ ، $\sqrt{\frac{36}{81}}$ ، $\sqrt{\frac{49}{16}}$

$\sqrt{\frac{4900}{32400}}$ ، $\sqrt{\frac{1}{2500}}$.

21 بسّط كل عدد مما يلي واعط النتيجة على شكل كسر. $\frac{\sqrt{400}}{\sqrt{900}}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ ،

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{448}}$ ، $\frac{\sqrt{6875}}{\sqrt{1100}}$.

22 اكتب كل عدد مما يلي على شكل نسبة مقامها عدد ناطق. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{42}}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

23 اكتب كل عدد مما يلي على شكل نسبة مقامها عدد ناطق. $\frac{2\sqrt{5}-2}{3\sqrt{7}}$ ، $\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}}$ ، $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ ،

$\frac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{6}}$.

24 عيّن العدد a في كل حالة مما يلي:

$\frac{a}{\sqrt{11}}=2-\sqrt{11}$ ، $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{a}$ ، $\sqrt{3}a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{8}}{a}=\frac{-3\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$.

تمارين عامة

25 ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 2cm،

[AH] هو الإرتفاع المتعلق بالضلع [BC].

عين القيمة المقربة إلى الجزء من 10 بالزيادة لمساحة المثلث ABC.

26 1) اكتب كل عدد مما يلي على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي : $\sqrt{147}$ ، $\sqrt{75}$ ، $\sqrt{12}$.

2) استنتج كتابة مبسطة للعدد A.

حيث $A=2\sqrt{12}-4\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{147}$.

27 اكتب كلا من العددين A و B على الشكل $a\sqrt{b}$

حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر ما يمكن

$A=\sqrt{20}-3\sqrt{125}+4\sqrt{45}$.

$B=5\sqrt{24}+\sqrt{54}-3\sqrt{216}+2\sqrt{6}$.

28 انشر وبسّط كلا مما يأتي:

أ) $\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)$.

ب) $(5+\sqrt{7})(\sqrt{7}-4)$.

ج) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.

29 انشر كلا مما يأتي وبسّطه:

أ) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$.

ب) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2$.

ج) $(\sqrt{25}-4)(\sqrt{25}+4)$.

د) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2-5(6+\sqrt{6})$.

30 نعتبر العددين A و B

حيث $A=7+\sqrt{32}$ و $B=7-4\sqrt{2}$.

1) احسب ما يلي:

$A\times B$ ، $A-B$ ، $A+B$.

2) اكتب $\frac{A}{B}$ على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

أؤكد تعلّماتي

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة	الإجابات (1)	(2)	(3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	الجذر التربيعي للعدد 0,25 هو	0,5	-0,5	0,05	22
2	$\sqrt{3^2}$ يساوي	$\sqrt{3}$	3	$2\sqrt{3}$	22
3	$\sqrt{(-2)^2}$ يساوي	-2	2	4	22
4	المعادلة $x^2 = 0,25$	تقبل حلين هما -0,5 و 0,5	تقبل حلين هما -5 و 5	لا تقبل أي حل	22 و 23
5	المعادلة $x^2 = (-1)^2$	تقبل حلين هما -1 و 1	تقبل حلا واحدا هو 1	لا تقبل أي حل	22 و 23
6	المعادلة $x^2 = -\sqrt{3}$	تقبل حلين هما -3 و 3	تقبل حلا واحدا هو 3	لا تقبل أي حل	22 و 23
7	العدد $\sqrt{3^2 \times 7}$ يكتب على الشكل	$3\sqrt{7}$	3×7	$3^2 \times 7^2$	24 و 25
8	العدد $\sqrt{\frac{9}{25}}$ يبسط على الشكل......	$\frac{81}{625}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3}$	24 و 25
9	العدد $\sqrt{\frac{1}{28}}$ يكتب	$\frac{1}{\sqrt{28}}$	$\sqrt{28}$	$\frac{1}{2\sqrt{7}}$	24 و 25
10	المعادلة $x^2 - 7 = 0$	تقبل حلا واحدا هو $\frac{7}{2}$	تقبل حلين هما $-\sqrt{7}$ و $\sqrt{7}$	تقبل حلا واحدا هو 14	22 و 23
11	المعادلة $-x^2 - 16 = 0$	تقبل حلا واحدا هو 4	تقبل حلين هما -4 و 4	لا تقبل أي حل	22 و 23

أدمج تعلّماتي

وضعية

أرادت أم شراء زربية مستطيلة الشكل لوضعها على أرضية غرفة الاستقبال.
عندما طلبت من البائع سعر الزربية وبعديها أجاب التاجر بالعبارات التالية:
سعر الزربية هو 12000DA ومساحتها $24m^2$ وطولها ضعف عرضها.
ساعد هذه الأمّ على معرفة طول هذه الزربية وعرضها. (تدوّر النتائج إلى cm)


زربية وادي سوف

تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: المطلوب البحث عن بُعدي الزربية علما أنّ: الزربية مستطيلة الشكل، طولها ضعف عرضها، مساحتها $24m^2$، ثمنها 12000DA.

تحليل التعليمة واختيار إستراتيجية حل مناسبة: إذا كان L طول الزربية و ℓ عرضها فإنّ $L = 2\ell$، العلاقة الموجودة بين المساحة والبعدين. استبعاد المعطيات المُشوّشة $24m^2$.

تنفيذ استراتيجية الحل: كتابة عبارة المساحة بدلالة ℓ ، القيام بالعمليات المناسبة (التبسيط، حل معادلة ، ...)

31 1) يعطى $x = 1,414\ 213\ 562\ 373\ 095$ و $y = \sqrt{2}$.

استعمل حاسبة لتعيين $x - y$.

هل $x = y$؟ علّل.

2) يعطى $a = 1 \div (\sqrt{3} + \sqrt{2})$ و $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

استعمل حاسبة لتحسب a و b.

هل $a = b$؟ علّل.

32 ABCDEFGH مكعّب طول حرفه 5cm.

1) ما طبيعة كل من المثلثين BCF و EFC؟

2) احسب القيمة المضبوطة لكل من الطولين CF و CE.

(أعط الناتج على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث b أصغر ما يمكن).

33 طريقة لإنشاء العدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ الذي يُسمّى العدد الذهبي.

AED مثلث قائم في A حيث $AE = \frac{1}{2}AD$.

1) احسب القيمة المضبوطة للطول ED.

2) أنشئ على نصف المستقيم [AE) النقطة B حيث EB = ED، ثم النقطة C حيث ABCD مستطيل.

3) تحقّق أنّ القيمة المضبوطة للطول AB هي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4) اعط ملخصا لطريقة إنشاء العدد الذهبي باستعمال المسطرة والمدور..

34 نعتبر المثلث ABC القائم في A والمتساوي الساقين حيث $AC = x$.

1) احسب الطول BC بدلالة x.

(تعطى النتيجة على الشكل $a\sqrt{b}$)

2) عبّر عن P محيط المثلث ABC بدلالة x.

3) احسب المدوّر إلى جزء من مئة لـ P في كل من الحالتين:

الحالة 1: $x = 3cm$ الحالة 2: $x = 5cm$

35 1) احصر كلا من العددين $\sqrt{41}$ و $\sqrt{113}$ بين عددين طبيعيين متتاليين.

2) استعمل حاسبة لإعطاء المدوّر إلى الجزء من 100 لكل عدد من الأعداد الآتية:

$\frac{15}{3+\sqrt{2}}$ ، $\sqrt{7}+3$ ، $\sqrt{54}$ ، $\sqrt{7}+\sqrt{11}$

36 x، y، z أطوال أضلاع مثلث حيث $x = \sqrt{3+\sqrt{27}}$
و $y = \sqrt{-3+\sqrt{12}}$ و $z = \sqrt{\sqrt{75}}$

1) أ) اكتب كلا من العددين x^2 و y^2 على الشكل $a + b\sqrt{3}$ حيث a و b عددان صحيحان نسبيان.

ب) اكتب العدد z^2 على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي

2) بيّن أنّ هذا المثلث قائم.

37 من امتحان شهادة التعليم المتوسط

A و B عددان حيث: $A = 3\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ ؛

$B = 2\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}$

1) بيّن أنّ A عدد طبيعي.

2) اكتب العدد B على الشكل $a\sqrt{3}$، حيث a عدد طبيعي.

3) بيّن أنّ $\frac{A}{B} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

38 من امتحان شهادة التعليم المتوسط

إليك الأعداد A، B، C حيث: $A = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{7}{4}$

$B = \frac{1,2 \times 10^{-2} \times 7}{12,5 \times 10^{3}}$ ، $C = \sqrt{175} - \sqrt{112} + 6\sqrt{7}$.

1) احسب A واكتبه على الشكل العشري.

2) أعط الكتابة العلمية للعدد B

3) اكتب C على أبسط شكل ممكن.

إنشاء قطعة مستقيم طولها $\sqrt{n}$ حيث n عدد طبيعي باستعمال برمجية جيوجبرا.

1) حالة n صغير نسبيا $n = 7$

• افتح ورقة عمل في برمجية جيوجبرا، وانتق الهندسة.

• ضع نقطة A ثمّ انقر على وعلى النقطة A لتعيين قطعة مستقيم بالطول 1، سمّ طرفها الآخر B.

• ارسم، باستعمال ، المستقيم العمودي على (AB) في A، وباستعمال الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 1.

تتقاطع الدائرة مع المستقيم في نقطتين سمّ C النقطة الواقعة أعلى (AB).

• ما هي القيمة المضبوطة للطول BC؟

• واصل بنفس الطريقة وعيّن النقط D، E، F، G، H كما في الشكل.

• ما هي القيمة المضبوطة للطول BH؟

• عيّن باستعمال المدوّر إلى 10^{-9} للطول BH وباستعمال حاسبة المدوّر إلى 10^{-9} للعدد $\sqrt{7}$.

2) حالة n كبير نسبيا $n = 23$

(استعمل الطريقة الواردة في التمرين 37).

قيمة العدد $\sqrt{2}$ المخزنة في ذاكرة حاسبة وقيمة مقرّبة له.



• عند استعمل اللمسة $\sqrt{}$ لحساب $\sqrt{2}$ تظهر الحاسبة قيمة $a = 1,414213562$

• أحسب باستعمال حاسبة الفرق $\sqrt{2} - a$. كيف تفسّر النتيجة؟

دوري الآن

استعمل المجدول إكسال أو المجدول جيوجيبرا لتقارن بين العددين:

$2a - 4$ و $\sqrt{a + \sqrt{4a-1}} + \sqrt{a - \sqrt{4a-1}}$

إذا علمت أن $a \geq 2$.

3 الحساب الحَرفي


روني ديكارت

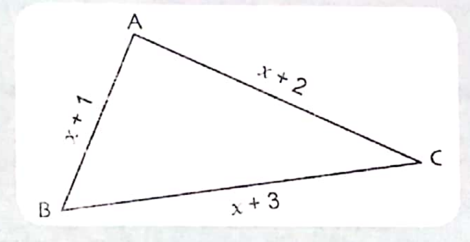
يَعتبر الفيلسوف الفرنسي ديكارت (Descartes) أن الرياضيات هي أداة لتفسير معظم الظواهر.
في إحدى الوثائق التي ألّفها في 06 جوان من سنة 1635 تحت عنوان «حوار الطريقة» اقترح إمكانيات وضع أسس تربط بين العمليات الحسابية والجبر من جهة، والجبر والهندسة من جهة أخرى.
فهو يذكر أنه لحساب مربع عدد معطى بدلالة عدد مجهول، يمكن الاستعانة بمفهوم مساحة مربع.
مثلا، لحساب العدد $(2x+1)^2$ نظم العمل في الجدول المقابل: يجمع الأعداد المسجلة في الخانات ويتحصل على $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

	x	x	1
x	x^2	x^2	x
x	x^2	x^2	x
1	x	x	1

سأتعلّم في هذا الباب

- معرفة المتطابقات الشهيرة وتوظيفها في الحساب المتمعن فيه وفي النشر والتحليل.
- نشر أو تحليل عبارات جبرية بسيطة.

تحدّ



لاحظ الشكل المقابل حيث ABC مثلث.
ما هي قيمة العدد x التي من أجلها يكون المثلث ABC قائما في A ؟

أستعدّ

أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

1) من أجل $x = 0$ العبارة $3x - 3$ تساوي 0.

2) من أجل $x = \sqrt{3}$ العبارة $x^2 - 3$ تساوي 0.

3) نشر العبارة $-2 \times (a - 1)$ هو $-2a + 2$.

4) نشر العبارة $4(2 - b)$ هو $8 - b$.

5) نشر العبارة $(1 + x)(1 + y)$ هو $1 + xy$.

6) نشر العبارة $(1 - x)(1 - y)$ هو $1 - x - y - xy$.

7) العبارة $3a + \sqrt{3}$ تساوي $3\left(a + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8) العبارة $16 - \frac{1}{2}x$ تساوي $\frac{1}{2}(8 - x)$.

9) العبارة $x^2 + 3x$ تساوي $x(x + 3)$.

10) العبارة $\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}$ تساوي $3\sqrt{2}x$.

1 نشر عبارة جبرية

1) احسب بطريقتين مختلفتين كلا مما يلي: $3x(9+5)$ و $(4-2,5)(3+1,2)$.

2) ميّز بين العبارات التي تدلّ على مجموع والعبارات التي تدل على جداء فيما يلي:

$x(3x+1)$ ، $x+(3-2x)$ ، $5x(1-x)$ ، $x(x+1)-2+(x+1)$ و $(3x-1)(3+x)$.

3) انشر كل عبارة مما يلي وبسّطها: $x(3x+1)$ ، $5x(1-x)$ و $(3x-1)(3+x)$.

اذكر في كل حالة الخاصية التي اعتمدت عليها.

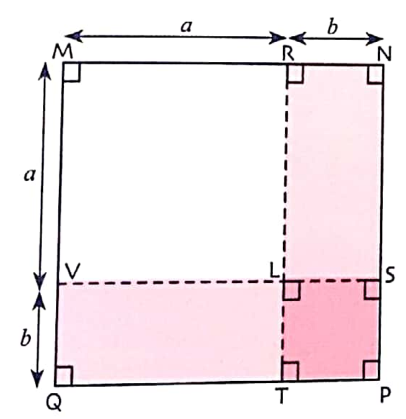
2 المتطابقات الشهيرة

1) مربع مجموع

أ) احسب بطريقتين مختلفتين كلا مما يلي: $(8+2)^2$ و $(3+0,5)^2$.

ب) a و b عددان موجبان

• عبّر عن مساحة المربع MNPQ مرة بدلالة طول ضلعه $a+b$ ومرة أخرى باستعمال مساحات الرباعيات MRLV، LSPT، RNSL، VLTQ.



• اكتب المساواة الناتجة عن العبارتين.

جـ) من أجل كل عددين a و b ؛

انقل وأكمل: $(a+b)^2=(a+b)\times(....+....)$

$=...+...+...+...$

$=...+...+...$

استنتج عبارة مبسطة للعدد $(a+b)^2$.

د) استعمل ما سبق لنشر كل من العبارتين $(x+1)^2$ و $(2x+3)^2$.

هـ) احسب ذهنيا(دون وضع العملية) كلا من: 21^2 و 53^2.

2) مربع فرق

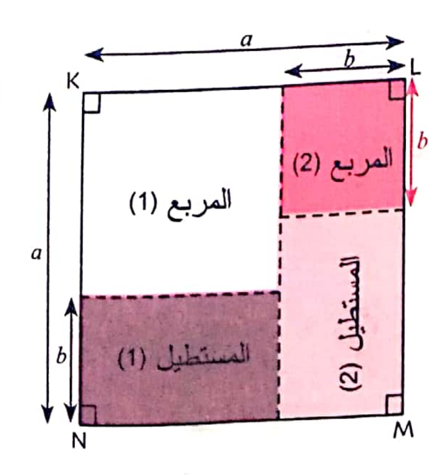
أ) احسب بطريقتين مختلفتين كلا مما يلي: $(9-3)^2$ و $(2,4-3)^2$.

ب) a و b عددان موجبان.

• عبّر عن مساحة المربع (1) مرة بدلالة طول ضلعه $a-b$

ومرّة أخرى باستعمال مساحات: المربع KLMN، المربع (2)

المستطيل (1) و المستطيل (2).



• اكتب المساواة الناتجة عن العبارتين.

جـ) من أجل كل عددين a و b ؛ انقل وأكمل: $(a-b)^2 = (a-b)\times(.... - ....)$

$= ... - ... - ... + ...$

$= ... - ... + ...$

استنتج عبارة مبسطة للعدد $(a-b)^2$.

د) استعمل ما سبق لنشر كل من العبارتين $(x-1)^2$ و $(5-2x)^2$.

هـ) احسب ذهنيا(دون وضع العملية) كلا من: 19^2 و 37^2.

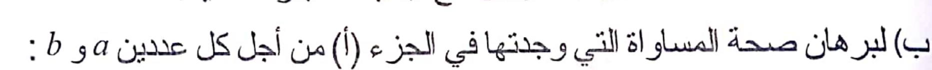
3) جداء مجموع حدّين وفرقهما

أ) a و b عددان موجبان.

• عبّر عن مساحة المستطيل (1)، مرة بدلالة بعديه $a+b$ و $a-b$

ومرة أخرى باستعمال مساحتي المربع KLMN، والمستطيل (2).

• اكتب المساواة الناتجة عن العبارتين مع تبسيط العبارة الثانية.



ب) لبرهان صحة المساواة التي وجدتها في الجزء (أ) من أجل كل عددين a و b :

انقل وأكمل: من أجل كل عددين a و b $(a+b)(a-b) = ... - ... + ... - ... = ... - ...$

جـ) استعمل ما سبق لنشر كل من العبارتين $(x-3)(x+3)$ و $(2x-5)(2x+5)$.

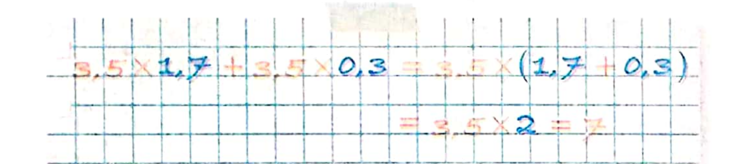
د) احسب ذهنيا(دون وضع العملية) كلا من: 95×105 و $97^2 - 3^2$.



3 تحليل عبارة جبرية

1) لاحظ كيف تحسب إيمان المجموع الآتي:

$3,5 \times 1,7 + 3,5 \times 0,3$.



أ) اشرح ما فعلته إيمان.

ب) احسب باستعمال الطريقة نفسها كلا مما يأتي: $2,9 \times 87 + 2,9 \times 13$ ، $2,35 \times 176 - 2,35 \times 76$.

2) اكتب على شكل جداء كل عبارة مما يلي: $9x+3$ ، $(x-2)(x+4)-3(x-2)$ و $(x-1)+(x-1)^2$

اذكر في كل حالة الخاصية التي اعتمدت عليها.

عندما نكتب عبارة مجموع على شكل جداء نقول أننا حلّلنا هذه العبارة.

3) لتكن العبارات الآتية: x^2+6x+9 ، x^2-4x+4 ، x^2-16.

• تقول إيمان : «لتحليل كل من هذه العبارات يمكن استغلال المساويات».

هل توافقها؟ اشرح.

• حلّل كل عبارة واذكر المتطابقة التي اعتمدت عليها.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1 النشر

تعريف

نشر عبارة جداء يعني كتابة هذه العبارة على شكل مجموع (أو فرق).

خواص

a ، b ، c و k أعداد.

- $k(a+b)=ka+kb$
- $k(a-b)=ka-kb$
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

مثال

$$5(x-1)=5\times x-5\times 1$$
$$=5x-5$$

$$(2x-1)(x+4)=2x^2+8x-x-4$$
$$=2x^2+7x-4$$

2 المتطابقات الشهيرة

تعريف

المتطابقة هي مساواة صحيحة من أجل كل القيم المعطاة للحروف الواردة في المساواة.

تُسمى المتطابقات الآتية المتطابقات الشهيرة.

a و b عددان.

1) مربع مجموع

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

مثال

$$(3x+2)^2=(3x)^2+2\times 3x(2)+2^2$$
$$=9x^2+12x+4$$

2) مربع فرق

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(4-2x)^2=4^2-2\times 4(2x)+(2x)^2$$
$$=16-16x+4x^2$$

3) جداء مجموع حدين وفرقهما

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(5x-1)(5x+1)=(5x)^2-1^2$$
$$=25x^2-1$$

3 التحليل

تعريف

تحليل عبارة مجموع هو كتابتها على شكل جداء.

خواص

a ، b و k أعداد.

- الخاصية التوزيعية: $ka+kb=k(a+b)$

$k(a-b)=ka-kb$

- المتطابقات الشهيرة :

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

أمثلة

- $6x^2+4x=2x\times 3x+2x\times 2=2x(3x+2)$
- $5(x+1)+3x(x+1)=(x+1)(5+3x)$
- $9x^2+6x+1=(3x)^2+2(3x)\times 1+1^2=(3x+1)^2$
- $4-4x+x^2=2^2-2\times 2\times x+x^2=(2-x)^2$
- $64-16x^2=8^2-(4x)^2=(8-4x)(8+4x)$

• نشر عبارة باستعمال المتطابقات الشهيرة

تمرين: انشر ثم بسط كل من العبارات التالية: أ) $(2x+1)^2$، ب) $(\sqrt{3}-4x)^2$، جـ) $(2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})$.

حل: أ) $(2x+1)^2=(2x)^2+2(2x)\times 1+1^2=4x^2+4x+1$.

ب) $(\sqrt{3}-4x)^2=(\sqrt{3})^2-2\times\sqrt{3}\times 4x+(4x)^2=3-8\sqrt{3}x+16x^2$.

جـ) $(2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})=(2x)^2-(\sqrt{5})^2=4x^2-5$.

طريقة

لنشر عبارة باستعمال المتطابقات الشهيرة، نتعرّف على نوع المتطابقة: مربع مجموع أو مربع فرق أو جداء مجموع حدين وفرقهما ونعيّن الحدين ثم نستعمل نشرها.

• تحليل عبارة باستخراج عامل مشترك

تمرين: حلّل كل عبارة مما يلي: أ) $A=4x\times(x+1)-12x^2$ ، ب) $B=(x-5)(x+1)+2(x-5)$

جـ) $C=3(\sqrt{2}x+1)-(\sqrt{2}x+1)(x+\sqrt{2})$.

حل: أ) بملاحظة أنّ $4x$ هو عامل مشترك بين $4x\times(x+1)$ و $12x^2$ نكتب

$$A=4x\times(x+1)-12x^2=4x\times(x+1)-4x\times 3x$$
$$=4x\times(x+1-3x)=4x\times(1-2x)$$

ب) بملاحظة أنّ $(x-5)$ هو عامل مشترك بين $(x-5)(x+1)$ و $2(x-5)$ نكتب

$$B=(x-5)(x+1)+2(x-5)=(x-5)(x+1+2)$$
$$=(x-5)(x+3)$$

جـ) بملاحظة أنّ $(\sqrt{2}x+1)$ هو عامل مشترك بين $3(\sqrt{2}x+1)$ و $(\sqrt{2}x+1)(x+\sqrt{2})$ نكتب

$$C=3(\sqrt{2}x+1)-(\sqrt{2}x+1)(x+\sqrt{2})=(\sqrt{2}x+1)[3-(x+\sqrt{2})]$$
$$=(\sqrt{2}x+1)(3-x-\sqrt{2})$$
$$=(\sqrt{2}x+1)(3-\sqrt{2}-x)$$

طريقة

لتحليل عبارة باستخراج عامل مشترك، نحدّد العامل المشترك k بين الحدين (أو الحدود) ثم نطبق الخاصة التوزيعية $k\times a+k\times b=k\times(a+b)$.

دوري الآن

1. انشر وبسّط كل مما يلي وبسّطها:

$(3x-2)(7x-4)$

$(8-3x)(x+\sqrt{7})+(8+3x)(x-\sqrt{7})$

2. حلّل كل عبارة مما يلي:

$A=(x-1)(5x+4)+(3+x)(x-1)$

$B=(2x-5)(x+2)-(x-2)(x+2)$

• تحليل عبارة باستعمال المتطابقات الشهيرة

تمرين 1 : حلل كل عبارة مما يلي: أ) $A = 25 + 10x + x^2$ ، ب) $B = 49x^2 - 14x + 1$

جـ) $C = (4x-1)^2 - (x+4)^2$.

حل : أ) لدينا $A = 25 + 10x + x^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times x + x^2$

أي العبارة A من الشكل $a^2 + 2ab + b^2$ حيث $a = 5$ و $b = x$. ومنه $A = (5+x)^2$.

ب) لدينا $B = 49x^2 - 14x + 1 = (7x)^2 - 2 \times (7x) + 1^2$

أي العبارة B من الشكل $a^2 - 2ab + b^2$ حيث $a = 7x$ و $b = 1$. ومنه $B = (7x-1)^2$.

جـ) العبارة C من الشكل $a^2 - b^2$ حيث $a = 4x - 1$ و $b = x - 4$.

ومنه

$$C = (4x-1)^2 - (x-4)^2$$
$$= [(4x-1)+(x-4)][(4x-1)-(x-4)]$$
$$= (5x-5)(3x+3) = 5(x-1) \times 3(x+1)$$

$C = 15(x-1)(x+1)$.

طريقة

لتحليل عبارة باستعمال المتطابقات الشهيرة، نتعرّف على نوع المتطابقة: مربع مجموع أو مربع فرق أو جداء مجموع حدين وفرقهما ونعيّن الحدين ثم نستعمل تحليلها.

تمرين 2

لتكن العبارة الجبرية A حيث: $A = (x-3)^2 + 2(x-3)$.

أ) انشر A وبسّطها ثم حللها إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

ب) احسب A من أجل $x = 1$.

حل

أ) • نشر A وتبسيطها: $(x-3)^2 = (x)^2 - 2(x) \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$ و $2(x-3) = 2x - 6$

إذن $A = x^2 - 6x + 9 + 2x - 6 = x^2 + 4x + 3$.

• تحليل A: نلاحظ أن $(x-3)$ عامل مشترك بين $(x-3)^2$ و $2(x-3)$.

$$A = (x-3)[x-3+2]$$
$$= (x-3)(x-1)$$

ب) من أجل $x = 1$. $x - 1 = 0$ بالتالي $A = 0$.

دوري الآن

1) انشر كل عبارة مما يلي وبسّطها:

$A = (x-2)^2 + 4(3x-1)(3x+3)$

$B = 9x(9x+1)^2 - x(x-1)^2$

2) حلّل كل عبارة مما يلي:

$E = 144x^2 - 24x + 1$

$F = (4x^2 - 1) + (12x^2 - 6x)$

نشر عبارة جبرية وتبسيطها

1 انشر كل عبارة مما يلي وبسّطها:

$B = -3(3 - x)$ ، $A = 2(5x - 1)$

$D = -4\left(7 - \frac{3}{2}x\right)$ ، $C = \frac{2}{5}\left(-20x + \frac{15}{2}\right)$

2 لتكن العبارة A: $A = (x+2)(3x-1)$

1) احسب قيمة A من أجل $x = 0$.

2) انشر العبارة A وبسّطها.

3) احسب، باستعمل عبارة A التي حصلت عليها في السؤال2، قيمة A من أجل $x = 0$.

هل وجدت نفس القيمة التي حصلت عليها في السؤال1؟

إذا كان الجواب (لا) ابحث عن الخطأ وصحّحه.

3 انشر كل عبارة مما يلي وبسّطها:

$L = (3x+2)(4x-5)$ ، $K = (2x+1)(x+2)$

$P = (-x-2)(5-x)$ ، $M = (x-7)(1-x)$

4 لتكن العبارة A حيث : $A = \left(\frac{2}{3}x + 5\right)\left(4 - \frac{1}{3}x\right)$

1) تحقّق من أنّه من أجل $x = 3$ فإنّ $A = 21$.

2) انشر وبسط العبارة A.

3) استعمل عبارة A التي حصلت عليها في السؤال2 للتحقق من قيمة A من أجل $x = 3$ مرّة ثانية.

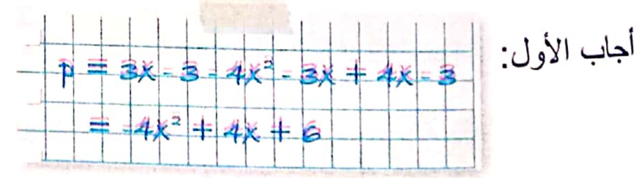
5 انشر كل عبارة مما يلي وبسّطها:

$C = \left(\frac{4}{3}x - 2\right)\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right)$ ، $B = \left(2x + \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{2}{5}\right)$

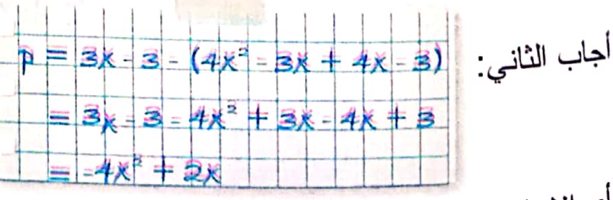
6 إليك إجابة تلميذين حول نشر وتبسيط العبارة

$P = 3(x-1) - (x+1)(4x-3)$

أجاب الأول:



أجاب الثاني:



أي الإجابتين صحيحة؟

7 انشر كل عبارة مما يلي وبسّطها:

$R = a - 3 - 2(a+3)$.

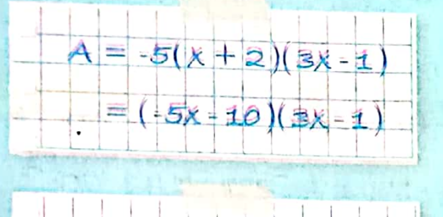
$S = -(a+2) - (3a-5)(2a-4)$.

$T = (a+3)\left(a + \frac{1}{3}\right) - (a+2)\left(a - \frac{1}{2}\right)$.

8 لنشر العبارة $A = -5(x+2)(3x-1)$ وتبسيطها

إليك بداية عمل كل من رياض وإيمان.

رياض:



إيمان:

A = -5(x + 2)(3x - 1)
= -5(3x² - x + 6x - 2)

1) اشرح عمل كل من رياض وإيمان.

2) أكمل عمل كل منهما. ماذا تلاحظ؟

الجداءات الشهيرة

9 انشر كل عبارة مما يلي وبسّطها:

$C = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2$ ، $B = (x + 0,3)^2$ ، $A = (x+5)^2$.

10 سؤال التمرين السابق نفسه من أجل:

$C = \left(3x + \frac{5}{3}\right)^2$ ، $B = (2x + 0,5)^2$ ، $A = (4x+1)^2$

11 احسب ذهنيا (دون وضع العملية) كل عدد مما يلي: 31^2 ، 105^2 ، 1009^2.

12 انقل، باستعمال $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ المساويات الآتية وأتممها:

1) $x^2 + ...x + ... = (... + 3)^2$

2) $9x^2 + ... + 1 = (.... + 1)^2$

3) $.... + 10x + 25 = (.... + ...)^2$

13 انشر كل عبارة مما يلي وبسّطها:

$A=(x-4)^2$ ، $B=(x-1,5)^2$ ، $C=\left(x-\frac{5}{11}\right)^2$.

14 انشر كل عبارة مما يلي وبسّطها:

$A=(2x-3)^2$ ، $B=(5x-1,4)^2$ ، $C=\left(\frac{4}{3}x-\frac{3}{5}\right)^2$

15 انشر كل عبارة مما يلي وبسّطها:

$A=(3x-4)^2+(x-3)^2$.

$B=4(1-2x)^2+(4x-1)^2$.

16 انشر كل عبارة مما يلي وبسّطها:

$D=(5x+1)^2+5(x-1)^2$.

$E=(3x-4)^2-4(1-x)^2$.

17 انشر كل عبارة مما يلي وبسّطها:

$A=(x+7)(x-7)$ ، $B=(x+0,2)(x-0,2)$

$C=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

18 سؤال التمرين السابق نفسه من أجل:

$A=(3x+5)(3x-5)$ ، $B=(1,5+2x)(1,5-2x)$

$C=\left(\frac{\sqrt{2}}{5}x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{5}x+\frac{1}{3}\right)$.

19 1) انشر العبارة $A=x^2-(x-1)(x+1)$ وبسّطها

2) اشرح كيف تستعمل نتيجة السؤال1 لإعطاء نتيجة كل مما يلي دون حساب:

$B=978654321^2-978654320\times978654322$

$C=999888777^2-999888778\times999888776$

التحليل

20 إليك العبارات :

$A=x^2-5x$ ، $B=(x+3)(1-2x)+5(1-2x)$

$C=(1+x)(x-5)-(1+2x)(1+x)$.

1) بملاحظة أنّ $x^2=x\times x$ حلّل العبارة A الى جداء عاملين.

2) حدّد العامل المشترك بين $5(1-2x)$ و $(x+3)(1-2x)$، ثمّ حلّل العبارة B الى جداء عوامل.

3) حلّل العبارة C الى جداء عوامل.

21 لتحليل العبارة

$A=(x-1)(x+2)+x(x+2)-(x+2)$

إلى جداء عوامل كتب أحد التلاميذ.

$A=(x-1)(x+2)+x(x+2)-(x+2)$

$=(x+2)(x-1+x)$

$=(x+2)(2x-1)$

1) للمصادقة على ما عمله هذا التلميذ، احسب من أجل $x=0$ قيمة A في العبارة المعطاة وقيمتها في النتيجة التي وجدها هذا التلميذ. ماذا تستنتج؟

2) ابحث عن الخطإ المرتكب في عمل هذا التلميذ ثمّ اكتب التحليل الصحيح للعبارة A.

22 حلّل كل عبارة مما يلي:

$C=5x(2x+1)+(2x+1)$

$D=(x+7)(x-3)-(x-3)$

$E=(x+1)(x-4)-x+4$

23 حلّل كل عبارة مما يلي:

$A=2x+6$ ، $B=7x-21$ ، $C=x^2-3x$.

24 حلّل كل عبارة مما يلي:

$D=(x-\sqrt{2})(4x+3)-(x+2)(x-\sqrt{2})$

$E=(2-5x)\left(x-\frac{2}{3}\right)+(2-5x)\left(x-\frac{4}{3}\right)$

(لاحظ وجود عامل مشترك).

25 حلّل كل عبارة مما يلي:

$F=2x\left(\frac{2}{7}-x\right)+\left(\frac{2}{7}-x\right)\left(\frac{5x-4}{3}\right)$

$G=(1,2x-3,5)(3,7x+x)$
$-(0,2x-6,5)(3,7+x)+(3,7+x)$

26 تحليل عبارة باستعمال المتطابقة

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

حلّل كل عبارة مما يلي:

$A = x^2 + 6x + 9$ ، $B = 4x^2 + 20x + 25$

$C = 9x^2 + 42x + 49$ ، $D = 1 + 8x + 16x^2$.

إرشاد: لتحليل عبارة A باستعمال المتطابقة $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ يمكن البدء بكتابة العبارة A على الشّكل $a^2 + 2ab + b^2$ وتحديد كل من a و b ثمّ استعملها لتحليل العبارة A.

27 تحليل عبارة باستعمال المتطابقة

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

حلّل كل عبارة مما يلي:

$A = x^2 - 10x + 25$ ، $B = 9x^2 - 12x + 4$

$C = 81x^2 - 18x + 1$ ، $D = 9 - 6x + x^2$.

إرشاد: لتحليل عبارة A باستعمال المتطابقة $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ يمكن البدء بكتابة العبارة A على الشّكل $a^2 - 2ab + b^2$ وتحديد كل من a و b ثمّ استعمالها لتحليل العبارة A.

28 احسب ذهنيا (دون وضع العملية) كل عدد مما يلي: أ) 21×19 ، 101×99 ، 1008×992.

ب) $98^2 - 2^2$ ، $408^2 - 407^2$ ، $777^2 - 223^2$.

29 انقل المساويات الآتية وأتممها باستعمال المتطابقات الشهيرة:

1) $x^2 + 6x + ... = (.... + ...)^2$

2) $36x^2 - .... + 1 = (.... - ....)^2$

3) $.... - .... + 25 = (x - ....)^2$

4) $.... - 81 = (x + ...)(x - ....)$

30 حلّل إلى جداء عوامل كل عبارة مما يلي:

$A = 9x^2 + 24x + 16$ ، $B = 121 - 22x + x^2$

31 نفس سؤال التمرين السابق من أجل:

$R = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$ و $S = \frac{25}{9}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{16}$.

32 تحليل عبارة باستعمال المتطابقة

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ حلّل كل عبارة مما يلي:

$A = (3-2x)^2 - 9$ ، $B = \frac{1}{4} - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

$C = (x+2)^2 - (3x-1)^2$.

إرشاد: لتحليل عبارة A باستعمال المتطابقة $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ يمكن البدء بكتابة العبارة A على الشّكل $a^2 - b^2$ وتحديد كلا من a و b ثمّ استعملها لتحليل العبارة A.

33 1) حلّل كل عبارة مما يلي:

$A = (2-x)^2 - 4x^2$ و $B = (2x+3)^2 - (x+1)^2$.

2) انشر كلا من العبارتين A و B وبسّطهما ثمّ احسب كلا من A + B و A - B.

34 ABC مثلث قائم في B، و x عدد موجب، ووحدة الطول هي السنتيمتر.

1) تحقّق من أنّ مساحة المثلث ABC تساوي $2x^2 + 8x$، واحسب هذه المساحة من أجل $x = 1$.

2) عبّر عن AC^2 بدلالة x، واكتب العبارة على شكل نشر مبسّط.

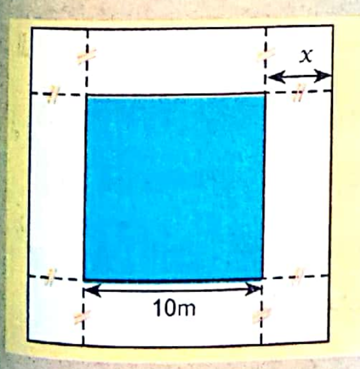
3) احسب الطول AC من أجل $x = 2$.

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة	الإجابات (1)	الإجابات (2)	الإجابات (3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	نشر الجداء $2x(x+2)$ هو	$2x^2+2x$	$2x^2+4x$	$2x+4x$	34
2	نشر الجداء $(-x)(1-x)$ هو	x^2-x	$x+x^2$	$1-x^2$	34
3	نشر الجداء $(4+x)(1-x)$ هو	$4-x^2$	$4-3x-x^2$	$5-x^2$	34
4	تحليل العبارة $ab+b$ هو	ab^2	$(a+1)b$	$2ab$	34
5	تحليل العبارة $\sqrt{2}x+2$ هو	$\sqrt{2}(x+\sqrt{2})$	$2\sqrt{2}x$	$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+1\right)$	34 و 35
6	تحليل العبارة $a-ab$ هو	$a(1-b)$	$b(a-1)$	$-a^2b$	34 و 35
7	نشر العبارة $(\sqrt{3}+x)^2$ هو	$3+x^2$	$\sqrt{3}+x^2$	$3+2\sqrt{3}x+x^2$	34 و 35
8	نشر العبارة $(1-\sqrt{2}x)^2$ هو	$1-2x^2$	$1-2\sqrt{2}x+2x^2$	$-2x^2$	34 و 35
9	العبارة x^2+25 تحلل على الشكل	$(x+5)^2$	x^2+5^2	لا تقبل تحليلا	34 و 35
10	العبارة $x^2+10x+25$ تحلل على الشكل	$(x+5)^2$	x^2+5^2	لا تقبل تحليلا	34 و 36
11	العبارة x^2-25 تحلل على الشكل	$(x-5)^2$	$(x-5)(x+5)$	لا تقبل تحليلا	34 و 36
12	العبارة $x^2-10x+25$ تحلل على الشكل	$(x-5)(x+5)$	$(x-5)^2$	لا تقبل تحليلا	34 و 36
13	الجداء 19×21 يساوي	399	401	309	34 و 36

أدمج تعلّماتي

وضعية



الشكل الملوّن بالأزرق هو حوض شكله مربع، طول ضلعه 10m.

نريد تهيئة شريط منتظم حول هذا الحوض يخصص للراجلين عرضه x.

ماهي قيمة x حتى تكون مساحة الشريط تساوي $44m^2$؟

مساعدة : $x^2+10x-11=(x-1)(x+11)$

تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: المطلوب البحث عن العرض x للشريط الذي من أجله تكون مساحة هذا الشريط $44m^2$.

تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل مناسبة: التعبير عن مساحة الشريط بدلالة x (هناك طرق متعدّدة)، توظيف المعلومة « مساحة هذا الشريط $44m^2$»

تنفيذ استراتيجية الحل: كتابة المساواة المناسبة ، حل معادلة ، ...

35 لتكن العبارة E

حيث $E=(x+1)(x+9)-(x+3)^2$

1) انشر وبسّط العبارة E.

2) استعمل نتيجة السؤال (1) لحساب كل مما يلي ذهنيا:

$101\times109-103^2$ ، $1,5\times9,5-(3,5)^2$

36 1) استعمل حاسبة لحساب كل عدد مما يلي:

$a=35^2-36\times34$ ، $b=97^2-98\times96$

$c=321^2-322\times320$.

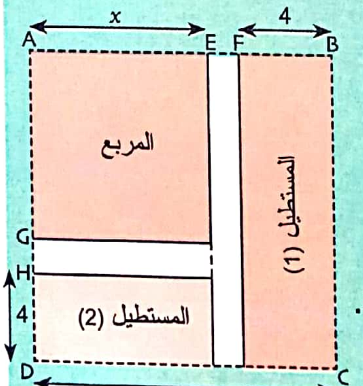
2) خمّن نتيجة الحساب $2018^2-2019\times2017$ ، ثمّ تحقّق من ذلك.

3) اشرح لماذا كل من الصيغ الآتية تعبّر عن الحسابات السابقة، ثمّ انشر كلا منها وبسّطها:

$E_1=x^2-(x+2)(x-1)$ ، $E_2=(x-1)^2-x(x-2)$

$E_3=(x+1)^2-(x+2)x$.

37 وحدة الطول هي السنتيمتر، و x عدد موجب. لوّنا في المربع ABCD مستطيلين ومربّعا كما في الشكل.



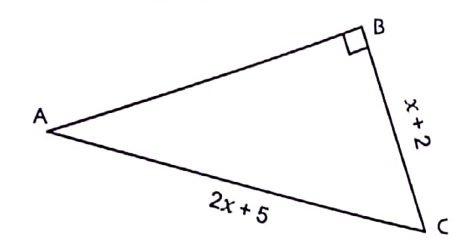
1) أوجد حصرا للعدد x.

2) بيّن أنّ الطولين EF و GH متساويان، وعبّر عنهما بدلالة x.

3) تحقّق بطريقتين مخلفتين أنّ مساحة الجزء غير الملوّن من الشكل هي $\mathcal{A}=60-4x-x^2$.

4) احسب مساحة الجزء غير الملوّن من أجل $x=4$.

38 باستعمال معطيات الشّكل المرفق.



1) عبّر بدلالة x عن AB^2.

2) اكتب عبارة AB^2 التي وجدتها مرّة على شكل جداء، ومرّة أخرى على شكل نشر مبسّط.

3) احسب في حالة $x=0$ وبطريقتين مختلفتين الطول AB بالتدوير إلى 10^{-2}.

39 إليك العبارة الجبرية D حيث

$D=x^2-4+(x-2)(3x+5)$

1) انشر العبارة D.

2) حلّل x^2-4 استنتج تحليلا للعبارة D

3) استعمل العبارة المناسبة لحساب قيمة D من أجل: $x=2$ ؛ $x=0$ ؛ $x=-1,75$.

40 1) نضع : $E=4x^2-8x-5$

احسب E من أجل $x=0,5$.

2) نضع : $F=(2x-2)^2-9$

أ) انشر ثمّ بسّط العبارة F.

ب) حلّل العبارة F.

جـ) ميّز العبارة المناسبة التي تسمح بمعرفة قيمة F من أجل $x=0,5$. دون حساب.

الحساب الحرفي بالبرمجية جيوجبرا

1) تهيئة

انقر على Affichage ثم اختر Ctrl+Maj+K Calcul formel

فتظهر النافذة :

Calcul formel
1 |

2) نشر العبارة $(7x-5)^2$

احجز العبارة $(7x-5)\wedge 2$ ثم اضغط على Enter

Calcul formel
1 Développer($(7x-5)\wedge 2$)

ماذا تلاحظ ؟

3) تحليل العبارة $9y^2-54y-81$

احجز العبارة $9y\wedge 2-54y+81$ ثم اضغط على Enter

Calcul formel
1 Factoriser $9y\wedge 2-54y+81$

ماذا تلاحظ ؟

4) تحليل عبارة باستعمال أعداد غير ناطقة

لتحليل العبارة $4x^2-7$ كما يلي:

احجز العبارة $4x\wedge 2-7$ ثم اضغط على Enter

Calcul formel
1 FactoriseIrr $4x\wedge 2-7$

ماذا تلاحظ ؟

5) حساب قيمة عبارة $A(x)$ من أجل قيمة لـ x

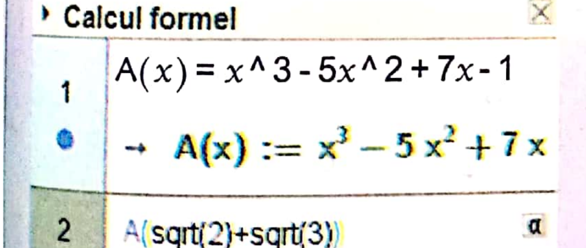
تعطى العبارة $A(x)=x^3-5x^2+7x-1$.

لحساب $A(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

احجز العبارة $A(x)=x\wedge 3-5x\wedge 2+7x-1$

ثم $A(\text{sqrt}(2)+\text{sqrt}(3))$.

ماذا تلاحظ بعد الضغط على Enter ؟



دوري الآن

تعطى العبارة $A(x)=(x^2-3)(x^2-5)-5(x^2-4)+1$.

باستعمال برمجية «جيوجبرا»، انشر العبارة $A(x)$ وحلّلها، ثم احسب $A(1+\sqrt{2})$.

4 معادلات ومتراجحات من الدّرجة الأولى بمجهول واحد

سأتعلّم في هذا الباب

- حل معادلة يؤول حلها إلى حل «معادلة جداء معدوم».
- حل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد وتمثيل حلولها على مستقيم مدرج.
- حل مشكلات بتوظيف معادلات أو متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي عالم موسوعي، برز في الرياضيات والفلك؛ فهو أول من استعمل كلمة «جبر» للعلم المعروف الآن بهذا الاسم.

وكفاه فخرا أنّه ألّف « كتاب الجبر والمقابلة».

في هذا الكتاب الذي شُيّد عليه تقدّم الجبر،

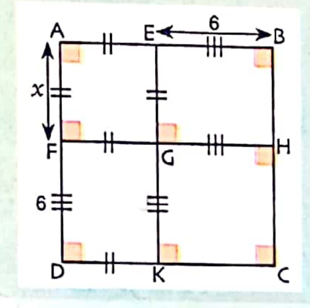
قسّم الخوارزمي الأعداد التي يحتاج إليها في الجبر إلى ثلاثة أنواع : جذر أي «x» ومال أي «x^2» ومفرد وهو العدد الخالي من «x».جاء في كتاب الخوارزمي المثل الآتي: «... وأمّا الأموال والعدد التي تعدل الجذور فنحو قولك مال وواحد وعشرون من العدد يعدل 10 أجذاره» وبحسب الرموز الحالية تكون المعادلة: $x^2 + 21 = 10x$. وقد حلّها واستخرج جذريها 3 و 7.

الخوارزمي (780م-850م)

تحدٍّ

في الشكل المقابل، x يُمثل طول ضلع المربع AEGF.

عيّن قيمة x علما أنّ $x^2 + 12x = 85$



أستعدّ

أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

1) إذا كان $2x - 1 = 0$ فإن $x = 1$.

2) حل المعادلة $2x + 3 = x + 3$ هو 0.

3) الجداء $x(x - 1)$ ينشر على الشكل $x^2 - x$.

4) المجموع $4x^2 + x$ يحلل على الشكل $x(4x + 1)$.

5) المجموع $b^2 + 16b + 64$ يحلل على الشكل $(b + 8)^2$.

6) إذا كان x عددا حيث $25x < 0$ فإنّ x يُمكن أن يُساوي 0.

7) إذا كان x عددا حيث $2x - 1 \leq 6$ فإنّ x يُمكن أن يُساوي $\frac{7}{2}$.

8) نطرح العدد 2 من طرفي المتباينة $4x + 2 < -1$ فنحصل على : $4x > -3$.

9) نقسم طرفي المتباينة $5x < -1$ على العدد 5 فنحصل على: $x < \frac{1}{5}$.

10) نقسم طرفي المتباينة $-2x \geq -1$ على العدد (2-) فنحصل على: $x \geq \frac{1}{2}$.

11) إذا كان $x \leq 3$ فإن $-3x \geq -6$.

1 المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

إليك برنامج الحساب التالي :

- اختر عددا.
- اضربه في 3 ثمّ أضف 2.
- اضرب الناتج في 3.
- اطرح 5.
- أعلن النتيجة

1) تحقّق أنّه عند اختيار العدد 2 في البداية، نتحصّل على العدد 19 في نهاية البرنامج.

2) بيّن أنّه عند اختيار العدد x في البداية، نتحصّل على العبارة $9x + 1$ في نهاية البرنامج.

3) اختارت فاطمة عددا وقامت بتفعيل البرنامج، فحصلت على 26-.

- ما هو العدد الذي اختارته في البداية؟

4) اختار مصطفى عددا وقام بتفعيل البرنامج، فحصل على ضعف العدد الذي اختاره في البداية.

- ما هو العدد الذي اختاره في البداية؟

2 خاصية الجداء المعدوم

الجداء المعدوم: انقل وأكمل كلا مما يلي:

1) $2 \times ... = 0$ ، $... \times 5 = 0$ ، $-\frac{3}{7} \times ... = 0$ ، $... \times \sqrt{3} = 0$

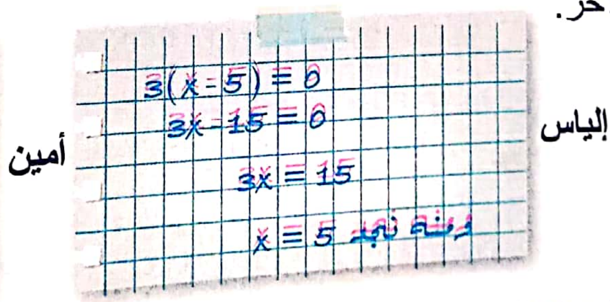
2) a و b عددان، إذا كان $a \times b = 0$ فإنّ $a = ...$ أو $b = ...$.

3) عبّر لغويا عن الخاصية السابقة، التي تسمى **خاصية الجداء المعدوم**.

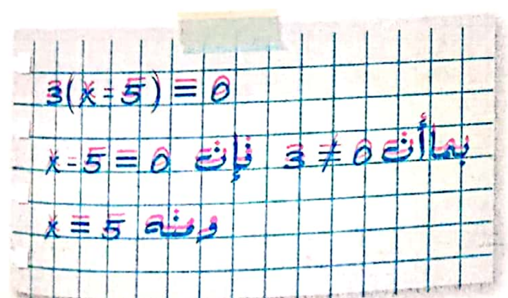
تطبيق: أ) حل معادلة من الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$

1) لاحظ عمل كل من إلياس وأمين لحل المعادلة $3(x - 5) = 0$، وحدّد أيّا منهما استعمل خاصية الجداء المعدوم واشرح طريقة الآخر.

إلياس



أمين



2) حل المعادلة $-1,2(3x + 2,7) = 0$ بالطريقة التي استعملها إلياس، ثم بطريقة أمين.

3) حل المعادلة $(x - 2)(x + 5) = 0$.

ب) حل معادلة تؤول إلى الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$

إليك المعادلة (E): $(1 - 4x)(x + 3) + 7(x + 3) = 0$.

1) تحقّق من أنّ $(1 - 4x)(x + 3) + 7(x + 3) = (x + 3)(8 - 4x)$.

2) حل المعادلة (E).

3 المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

بمناسبة عيد الفطر، وتسهيلا لعملية التواصل عبر الرسائل النصية، اقترح متعامل للهاتف النقال العرض الآتي على زبائنه: 2,5DA للرسالة الواحدة و 100DA اقتطاع جزافي من الرصيد.

يرغب يونس في عدم تجاوز المبلغ 150DA الموجود في رصيده.

1) هل يمكن ليونس القيام بإرسال: أ) 21 رسالة؟ ب) 20 رسالة؟ جـ) 16 رسالة؟

2) نرمز إلى عدد الرسائل القصيرة بالرمز x.

أ) من بين المتباينات الآتية، حدّد تلك التي توافق رغبة يونس :

$150x + 100 \leq 2{,}5$ $\quad$ $150x - 100 \leq 2{,}5$ $\quad$ $2{,}5x + 100 \leq 150$

ب) اقترح قيمة لـ x توافق رغبة يونس، وقيمة أخرى لـ x لا توافقها.

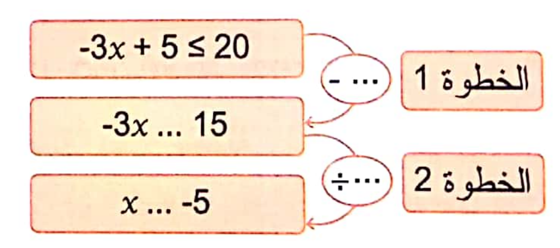
- كل متباينة من المتباينات الثلاثة السّابقة تُسمّى متراجحة ذات المجهول x.
- كل قيمة لـ x تجعل المتراجحة متباينة صحيحة، تُسمّى حلاّ لهذه المتراجحة.

جـ) هل العدد 2 حل للمتراجحة $2{,}5x + 100 \leq 150$؟

السؤال نفسه من أجل العدد 21.

حل متراجحة : نريد فيما يأتي حل المتراجحة $-3x + 5 \leq 20$ وتمثيل حلولها على مستقيم مدرّج.

1) انقل ثمّ أتمم مبرّرا كل خطوة تقوم بها:



2) نقبل أنّ حلول المتراجحة $-3x + 5 \leq 20$ هي نفسها حلول المتراجحة $x \geq -5$.

اعتمادا على محتوى السطرين الأول والثاني من الجدول الآتي، أتمم السطر الأخير.

المتراجحة	حلول المتراجحة مُعبّر عنها بجملة لغوية	التمثيل البياني لحلولها
$x < 3$	كل قيم x الأصغر من 3	مستقيم مدرج، 3، حلول المتراجحة
$x \geq 2$	كل قيم x الأكبر من أو تساوي 2	مستقيم مدرج، 2، حلول المتراجحة
$-3x + 5 \leq 20$	....	....

1 المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

يؤول حل كل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إلى حل معادلة من الشكل $ax = b$ حيث $a \neq 0$.

الحل الوحيد لهذه المعادلة هو العدد $\frac{b}{a}$.

مثال

المعادلة $4x - 3 = 2x + 6$.

تكتب $4x - 3 - 2x = 2x + 6 - 2x$.

أي $2x - 3 = 6$ ويمكن كتابة هذه المعادلة الأخيرة على الشكل $2x = 9$.

بتقسيم الطرفين على العدد 2 أي $x = \frac{9}{2}$.

ينتج أن $\frac{9}{2}$ هو الحل الوحيد للمعادلة $4x - 3 = 2x + 6$.

2 معادلات جداء معدوم

كل معادلة من الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$ حيث a ، b ، c و d أعداد معلومة، تُسمّى معادلة جداء معدوم.

مثال 1

$(3x - 4)(-2x + 1) = 0$ هي معادلة جُداء معدوم.

خاصية الجداء المعدوم

- إذا كان جداء عاملين معدومًا فإن أحد هذين العاملين على الأقل معدوم.
- بعبارة أخرى

إذا كان $a \times b = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$.

ملاحظة: تسمح هذه الخاصية بحل معادلة «جُداء معدوم».

مثال 2

$2x = 0$ يعني أنّ $x = 0$ لأنّ $2 \neq 0$.

حلول المعادلة $(ax + b)(cx + d) = 0$ هي حلول المعادلتين $ax + b = 0$ و $cx + d = 0$.

مثال 3

نحل المعادلة $(3x - 4)(-2x + 1) = 0$.

$(3x - 4)(-2x + 1) = 0$ يعني $3x - 4 = 0$ أو $-2x + 1 = 0$.

$3x - 4 = 0$ يعني $3x = 4$ أي $x = \frac{4}{3}$.

$-2x + 1 = 0$ يعني $-2x = -1$ أي $x = \frac{1}{2}$.

إذن للمعادلة $(3x - 4)(-2x + 1) = 0$ حلان هما $\frac{1}{2}$ و $\frac{4}{3}$.

• حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تمرين: حل كل معادلة من المعادلتين الآتيين:

أ) $2x - 5 = 8$ ب) $2,5x + 4,6 = 1,3x - 0,2$

حل: أ) حل المعادلة $2x - 5 = 8$ نضيف 5 إلى كل طرف فنجد $2x - 5 + 5 = 8 + 5$

أي $2x = 13$ ومنه $x = \frac{13}{2}$ وللمعادلة $2x - 5 = 8$ حل وحيد هو $\frac{13}{2}$.

ب) حل المعادلة $2,5x + 4,6 = 1,3x - 0,2$

نطرح $1,3x$ من كل طرف

فنجد $2,5x + 4,6 - 1,3x = 1,3x - 0,2 - 1,3x$

أي $1,2x + 4,6 = -0,2$

نطرح 4,6 من كل طرف فنجد $1,2x + 4,6 - 4,6 = -0,2 - 4,6$

أي $1,2x = -4,8$ ومنه $x = -\frac{4,8}{1,2} = -4$

وللمعادلة $2,5x + 4,6 = 1,3x - 0,2$ حل وحيد هو -4.

• حل معادلة من الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$

تمرين: لتكن العبارة $F = (1 - 2x)(4x - 3) - 3(4x - 3)$

1) حلّل العبارة F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

2) حل المعادلة $(1 - 2x)(4x - 3) - 3(4x - 3) = 0$.

حل: 1) لاحظ: العامل المشترك للجدائين $(1 - 2x)(4x - 3)$ و $3(4x - 3)$ هو $(4x - 3)$.

إذن $F = (4x - 3)[(1 - 2x) - 3]$

ومنه $F = (4x - 3)(-2x - 2)$

2) ممّا سبق نستنتج أنّ حل المعادلة $(1 - 2x)(4x - 3) - 3(4x - 3) = 0$

يؤول إلى حل المعادلة $(4x - 3)(-2x - 2) = 0$.

ينتج من المعادلة $(4x - 3)(-2x - 2) = 0$ أنّ: $4x - 3 = 0$.

أو $-2x - 2 = 0$. أي $x = -1$ أو $x = \frac{3}{4}$.

إذن للمعادلة $(1 - 2x)(4x - 3) -3(4x - 3) = 0$ حلاّن هما: -1 و $\frac{3}{4}$

دوري الآن

1 حل كل معادلة مما يلي:

$7 - 2x = 0$ ، $\frac{-x+3}{2} = \frac{2x+1}{3}$

$2x - \frac{1}{3} = \frac{x}{5} + 2$.

2 حل كلا من المعادلات الآتية:

$4x(-x + 1) = 0$ ، $(2x + 1)^2 = 0$

$4x^2 - 1 = 0$ ، $9x^2 = 4x$

3 المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

- المتراجحة بمجهول x هي متباينة قد تكون صحيحة وقد تكون خاطئة وهذا حسب قيم x.
- قيم x التي من أجلها تكون المتباينة صحيحة هي حلول المتراجحة.
- حل متراجحة هو إيجاد كل حلولها.

يُقال عن متراجحة أنّها من الدرجة الأولى لمجهول x، إذا أمكن كتابتها على أحد الأشكال الآتية :
$ax + b > cx + d$ أو $ax + b < cx + d$.
$ax + b \leq cx + d$ أو $ax + b \geq cx + d$.

طريقة

لحل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد، نستعمل القواعد الآتية:
- نُحافظ على اتجاه المتراجحة عندما نُضيف إلى (أو نطرح من) طرفيها نفس العدد.
- نُحافظ على نفس اتجاه المتراجحة عندما نضرب طرفيها في (أو نقسم طرفيها على) نفس العدد الموجب تماما.
- نُغيّر اتجاه المتراجحة عندما نضرب طرفيها في (أو نقسم طرفيها على) العدد السالب تماما نفسه.

مثال 1

المتباينة $-3 < 4x$ هي متراجحة ذات المجهول x.
من أجل $x = -2$ نكتب $-3 < 4 \times (-2)$ فنحصل على متباينة خاطئة $-3 < -8$ إذن العدد (-2) ليس حلا للمتراجحة $-3 < 4x$.

مثال 2

1) حل المتراجحة $4x - 1 \leq x + 3$.
نطرح x من الطرفين فنحصل على $3x - 1 \leq 3$.
نضيف 1 للطرفين، نحصل على $3x \leq 4$.
نقسم على 3 إذن $x \leq \frac{4}{3}$. (لاحظ اتجاه المتراجحة لم يتغير)
حلول المتراجحة $4x - 1 \leq x + 3$ هي كل الأعداد x الأصغر من أو يساوي $\frac{4}{3}$.

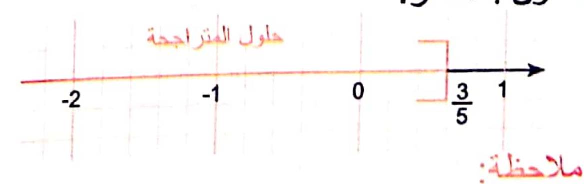
2) حل المتراجحة $-3x + 2 > 20$. نطرح 2 من الطرفين، فنحصل على $-3x > 18$. نقسم الطرفين على العدد السالب -3، نحصل على $x < -6$.
(لاحظ اتجاه المتراجحة قد يتغير)
حلول المتراجحة $-3x + 2 > 20$ هي كل الأعداد x الأصغر من -6.

4 التمثيل البياني لحلول متراجحة

تُمثل حلول متراجحة على مستقيم عددي مُدرّج.

مثال 1

حل المتراجحة $5x \leq 3$
نضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{5}$، نجد $x \leq \frac{3}{5}$.
حلول المتراجحة هي كل الأعداد x الأصغر من أو تساوي $\frac{3}{5}$.
تُمثل حلول المتراجحة على المستقيم المُدرّج بالجزء المُلوّن بالأحمر.



ملاحظة:
الرمز] موجه نحو الجزء الملوّن بالأحمر للتعبير عن أن العدد $\frac{3}{5}$ هو أيضا حل للمتراجحة المعطاة.

مثال 2

حل المتراجحة $-\frac{1}{2}x + 2 < -1$ نطرح العدد 2 من الطرفين، نجد $\frac{-1}{2}x < -3$.
نضرب الطرفين في العدد (-2)، نجد $x > 6$.
(لاحظ اتجاه المتراجحة قد يتغير)
حلول المتراجحة هي كل الأعداد x الأكبر من 6.

حلول المتراجحة
4 5 6 7

تمثل حلول المتراجحة على المستقيم المُدرّج بالجزء الملون بالأحمر.

ملاحظة: الرمز] غير موجه في إتجاه الجزء الملون وذلك للتعبير على أن العدد 6 ليس حل للمتراجحة المعطاة.

• حل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تمرين: حل كل متراجحة مما يلي ثم مثّل بيانيا حلولها.

أ) $-7x+1 < x-3$ ؛ ب) $\frac{3x+2}{6} \geq \frac{2x-3}{5}$.

حل: أ) نطرح العدد 1 من طرفي المتراجحة $-7x+1 < x-3$ فنحصل على $-7x < x-3-1$ أي $-7x < x-4$.

نطرح العدد x من طرفي المتراجحة الأخيرة، فنحصل على $-7x-x < -4$ أي $-8x < -4$.

نقسم طرفي المتراجحة $-8x < -4$ على العدد -8، فنحصل على $x > \frac{-4}{-8}$ أي $x > \frac{1}{2}$

ينتج أن حلول المتراجحة $-7x+1 < x-3$ هي كل الأعداد x الأكبر من $\frac{1}{2}$

حلول المتراجحة

الجزء الملوّن بالأحمر هو التمثيل البياني لحلول المتراجحة $-7x+1 < x-3$.

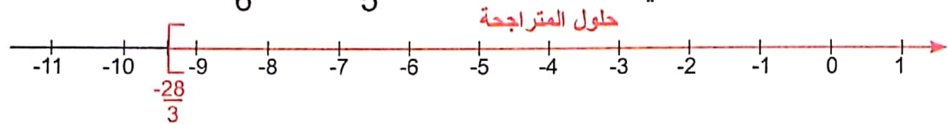
ب) نضرب طرفي المتراجحة في العدد 30 (30 هو المقام المشترك للنسبتين $\frac{3x+2}{6}$ و $\frac{2x-3}{5}$).

فنحصل على المتراجحة $15x + 10 \geq 12x - 18$.

بعد التبسيط، نحصل على المتراجحة $3x \geq -28$ وبقسمة الطرفين على العدد 3، نحصل على $x \geq \frac{-28}{3}$.

ينتج أن حلول المتراجحة $\frac{3x-2}{6} \geqslant \frac{2x-3}{5}$ هي كل الأعداد x الأكبر من أو تساوي $\frac{-28}{3}$.

الجزء الملوّن بالأحمر هو التمثيل البياني لحلول المتراجحة $\frac{3x-2}{6} \geqslant \frac{2x-3}{5}$.



• ترييض مشكلة

تمرين: شخص عمره 36 سنة و أعمار أبنائه الثلاثة بالسنوات هي 4 ، 6 ، 8 على التوالي.

بعد كم سنة يكون عمر الأب يساوي مجموع أعمار أبناءه الثلاثة؟

حل: أ) نسمي x عدد السنوات التي يكون بعدها عمر الأب هو مجموع أعمار أبنائه الثلاثة.

ب) نُعبّر عن هذه الوضعية بالمعادلة $36 + x = (4+x)+(6+x)+(8+x)$.

جـ) نحل المعادلة التي وجدناها والتي تكتب على الشكل $36 + x = 3x + 18$ ومنه يكون $2x = 18$ أي $x = 9$.

بالتالي يكون عمر الأب مساويا مجموعَ أعمار أبنائه الثلاثة بعد 9 سنوات.

التحقق: بعد 9 سنوات عمر الأب هو 45 سنة وأعمار الأبناء هي 13 ، 15 و 17

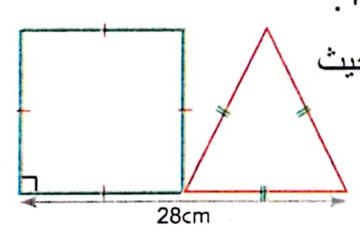
ولدينا $45 = 13 + 15 + 17$.

دوري الآن

1 حل كل متراجحة مما يلي ثم مثل بيانيا حلولها : $-5(2x-1) \leq 2-4x$.
$\frac{5x-1}{2} + 3 > 1 + 2x$.

2 1) حل المتراجحة $4x \geq 84 - 3x$.

2) ما هو أقصر ضلع للمربع بحيث يكون محيطه أكبر من أو يساوي محيط المثلث؟



المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1 حل كل معادلة من المعادلات المقترحة:

$\frac{x}{4}=7$ ، $2,8x=5,6$ ، $-3x=5$ ، $2x=11$.

2 حل كل معادلة من المعادلات المقترحة:

$7^2x=7^3$ ، $10^5x=10^3$ ، $10x=10^2$.

3 حل كل معادلة من المعادلات المقترحة:

$x-4=4$ ، $x+11=2$

$3,2+x=5$ ، $\sqrt{2}-x=1-\sqrt{2}$.

4 حل كل معادلة من المعادلات المقترحة:

$2x-3=3x+1$ ، $5x+6=11$

$5x+11=11x+5$ ، $4x-3=-2x+5$.

5 حل كل معادلة من المعادلات الآتية:

$\sqrt{2}x=\sqrt{8}$

$2\sqrt{3}x=\sqrt{3}x+\sqrt{27}$

$\sqrt{2}x+\sqrt{8}x=4\sqrt{2}+8\sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{2}x=\frac{5}{\sqrt{2}+1}$

$2\sqrt{5}x-\frac{\sqrt{5}}{3}x=\frac{\sqrt{5}}{5}$

6 1) انشر العبارة وبسطها $2x+24-7(x-2)$.

2) حل المعادلة $2x+24-7(x-2)=138$.

7 1) انشر كلا من العبارتين وبسطها

$2(2x-1)+3$ و $5(x+3)-3x$.

2) حل المعادلة $2(2x-1)+3=5(x+3)-3x$.

8 حل كل معادلة من المعادلتين الآتيتين:

$\frac{1}{2}(2x-1)-3\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)=0$

$4x^2-2(x+5)-3-2x(2x-3)=0$

9 حل كل معادلة من المعادلات الآتية:

$\frac{x-1}{9}=\frac{x+1}{3}$ ، $\frac{2+x}{2}=\frac{2x+1}{4}$

$\frac{x+4}{10}=\frac{3}{10}-\frac{2x}{5}$ ، $x=\frac{x+3}{5}+1$.

10 ما هو العدد الذي إذا ضربته في 6 و أضفت إلى الناتج 7، تحصل على 31؟

11 ما هو العدد الذي إذا ضربته في 3 و طرحت منه 21، تحصل على ضعف العدد الذي اخترته في البداية؟

12 يبلغ عمر أب 43 سنة وعمرا إبنيه 4 و 7 سنوات بعد كم سنة يكون عمر الأب ضعف مجموع عمري إبنيه؟

13 بلغت النسبة المئوية لإنجاز بناء سَدّ 75% من المدة المُقرّرة، ثم تواصل البناء لمدة 4 سنوات. إذا علمت أنّ المُدّة المتبقية لإنجاز المشروع هي 11 سنة، فما هي المُدّة المُقرّرة لبنائه؟

المعادلات من الشكل $(ax+b)(cx+d)=0$

14 حل كل معادلة من المعادلات الآتية:

$7(x+2)=0$ ، $(x+5)(2-x)=0$

$\frac{2}{3}x(x-4)=0$ ، $(5-3x)(2x-4)=0$.

15 1) حلّل إلى جداء عاملين العبارة $6x^2-3x$.

2) حل المعادلة $6x^2-3x=0$.

16 1) حلّل إلى جداء عاملين العبارة :

$5(x+3)+(x-1)(x+3)$.

2) حل المعادلة $5(x+3)+(x-1)(x+3)=0$.

17 1) حلّل إلى جداء عاملين العبارة x^2-25 .

2) حل المعادلة $x^2-25=0$.

18 لتكن العبارة p حيث $p=(9x^2-1)+6x^2+7x-3$.

1) تحقّق أنّ: $(3x-1)(2x+3)=6x^2+7x-3$

2) حلّل العبارة $9x^2-1$.

3) حلّل العبارة p إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

4) حل المعادلة $p=0$

19 p عبارة حيث:

$p = (x^2 + 10x + 25) - (x^2 - 25)$.

1) حلّل كل عبارة من العبارتين:

$A = x^2 + 10x + 25$ و $B = x^2 - 25$

2) حلّل العبارة p إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

حل المعادلة $p = 0$.

20 1) تحقّق أنّ $(2x-1)^2 - 81 = 4x^2 - 4x - 80$.

2) استنتج تحليلا للعبارة $A = 4x^2 - 4x - 80$.

3) حل المعادلة $4x^2 - 4x - 80 = 0$.

المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

21 أكمل في كل حالة مما يلي بالرمز المناسب > أو <.

1) $-1,8 \ldots -1,84$

2) $3,49 \times 10^3 \ldots 3,5 \times 10^3$

3) $1 + \frac{3}{2} \ldots \frac{7}{3}$

22 إذا علمت أن $x > \frac{3}{2}$. أكمل كلا مما يلي:

$2x > \ldots$ ، $-4x \ldots -6$ ، $2x + 5 \ldots \ldots$.

23 إذا علمت أن $x < -2$. أكمل كلا مما يلي:

$5x < \ldots$ ، $-2x \ldots 4$ ، $3x - 1 \ldots \ldots$.

24 حل كل متراجحة مما يلي:

$3x \geq -2$ ، $-2x < 4$ ، $\frac{5}{3}x > 10$.

25 1) إليك المتراجحة $3x - 2 < 6$.

عين قيم x التي تحقّق هذه المتراجحة من بين القيم الآتية : $x = 0$ ، $x = -2$ ، $x = 3$ ، $x = \frac{8}{3}$.

2) حل المتراجحة المعطاة.

26 حل المتراجحة $4x - 1 \leq 17 - 2x$.

27 حل كل متراجحة مما يلي:

$\frac{5}{2}x - \frac{1}{3} > 0$ ، $1,2x - 0,6 \leq 3$

$\frac{x}{2} - \frac{3}{4} \geq 1$ ، $\frac{x+1}{2} < 3x - 1$.

28 1) حل المتراجحة $2x - 1 \leq 6$.

2) مثّل بيانيّا حلول هذه المتراجحة.

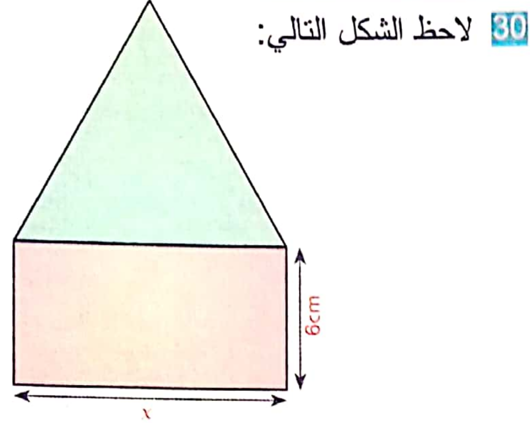
29 1) انشر وبسّط العبارة P حيث:

$P = (-3x-1)^2 - 3x(3x+7)$.

2) حلّل العبارة $R = (4x^2 - 1) - (2x+1)(2x+3)$

3) حل المتراجحة $P \leq R$ ثمّ مثّل بيانيا حلولها.

30 لاحظ الشكل التالي:



ما هي قيم x التي من أجلها يكون محيط المستطيل أكبر من محيط المثلث المتقايس الأضلاع؟

31 1) حل المتراجحة الآتية: $5(2x-1) \geq 4x - 1$.

2) مثّل بيانيا حلول هذه المتراجحة.

32 1) حلّ كلا من المتراجحتين الآتيتين:

$3(2x-6) + 4(2x-3) \geq 2x - 5(2x-3)$

$6(1-2x) - 4(-2x-5) > 3(x-7) - 2(8-9x)$.

2) مثّل بيانيا حلول كل متراجحة.

33 ABCD مستطيل.

A B D C 3cm x

1) عبّر عن محيطه P بدلالة طوله x.

2) ما القيم التي يمكن أن يأخذها x حتى يكون محيط المستطيل أكبر من أو يساوي 40cm.

أؤكد تعلّماتي

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة	الإجابات (1)	(2)	(3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	حل المعادلة $-2+x=5$ هو ...	2	7	3	46 و 47
2	حل المعادلة $4x=5x$ هو ...	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{4}{5}$	46 و 47
3	المعادلة $(x-3)(2x+2)=0$ تقبل ...	حلا واحدا هو 3	حلا واحدا هو -1	حلين هما 3 و -1	46 و 47
4	المعادلة $x^2-1=0$ تقبل ...	حلين هما 1 و -1	حلا واحدا هو 1	حلا واحدا هو -1	46 و 47
5	إذا كان $x\geq -1$ فإن ...	$2x+2\geq 0$	$2x-2<0$	$2x\geq -2$	48 و 49
6	التمثيل على مستقيم مدرّج للأعداد x حيث $x>-3$ هو ...	-3	-3	0	48 و 49
7	-1 هو حل للمتراجحة ...	$2x<-3$	$2x+1<0$	$-x+1>0$	48 و 49
8	حلول المتراجحة $-\frac{1}{3}x>1$ هي الأعداد x حيث ...	$x>3$	$x<-3$	$x>-3$	48 و 49
9	التمثيل البياني لحلول المتراجحة $x+1>-1$ هو ...	-2	-2	0	48 و 49

أدمج تعلّماتي

وضعية

لممارسة رياضة السباحة في المسبح البلدي، يقترح نادٍ رياضيٌّ على التلاميذ المتمدرسين صيغتين للاشتراك.

الصيغة الأولى: الدفع الفوري 75 دينارًا لكل حصة.

الصيغة الثانية: اشتراك سنوي قدره 560 دينارا ودفع فوري قدره 5 دنانير لكل حصة. ابتداءً من أي عدد للحصص تكون التسعيرة الثانية أفضل ؟

تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: ترجمة كل صيغة بعبارة حرفية، لتحديد الصيغة الأفضل نقارن الصيغتين.

تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل مناسبة: يمكن التفكير في التجريب، كتابة متراجحة مناسبة وحلّها فيما بعد.

تنفيذ استراتيجية الحل: إجراء تجريب ، حل متراجحة ، ....، تفسير النتائج

34 لتكن العبارة E حيث

$$E=(5x-1)^2-(2x+3)(5x-1)$$

1) انشر وبسّط العبارة E.

2) حلّل العبارة E إلى جداء عاملين.

3) احسب قيمة E من أجل كل من: $x=\frac{1}{5}$ و $x=-1$

4) حل المعادلة $E=0$.

35 1) تحقق من صحة المساواة

$$6(3x+4)(3x-4)=54x^2-96$$

2) حلّل العبارة A بحيث

$$A=(3x+4)(x-7)-(54x^2-96)$$

3) حل المعادلة $A=0$.

4) حل المتراجحة $54x^2-96\leq 18x(3x+1)-90$

مثّل بيانيا حلولها على مستقيم مدرّج.

36 1) انشر كلا من العبارتين وبسطها:

$$A=(x+4)^2-x(x-2)$$

$$B=(3x-1)(3x+1)-(3x-2)^2$$

2) حل المتراجحة $A\geq B$ ذات المجهول x.

37 إليك برنامج حساب.

- اختر عددا.
- اضربه في 3
- أضف له 5.

1) ماهو العدد الذي ينبغي اختياره إذا أردنا الحصول في النتيجة على العدد 32؟

2) ماهو العدد الذي ينبغي إختياره إذا أردنا الحصول في النتيجة على ضعفه؟

38 ما هي قيم x التي من أجلها يُمكن إنشاء مثلث أطوال أضلاعه بالسنتيمتر: 5 ، x و 7.

39 في الشكل المقابل،

كل من الرباعيين ABCD و EFGH هو مربع.

1) عبّر عن مساحة المربع EFGH بدلالة x.

2) تحقّق أنّ $2x^2-16x+30=(2x-10)(x-3)$

3) عيّن قيم x التي من أجلها تكون مساحة المربع EFGH تُساوي $34cm^2$.

40 لاحظ الشكل الآتي حيث الرباعي ABCD مربع (الوحدة 1cm).

1) عبّر عن مساحة المستطيل الملوّن بدلالة x.

2) تحقّق أنّ $(x-12)(x+7)=x^2-5x-84$.

3) عيّن قيمة x التي من أجلها تكون مساحة المستطيل المُلوّن تساوي $60cm^2$.

41 من امتحان شهادة التعليم المتوسط

لتكن العبارة E حيث :

$$E=(4x-1)^2-(3x+2)(4x-1)$$

1)انشر وبسط العبارة E. 2) حلل العبارة E الى جداء عاملين.

3)حل المعادلة: $(4x-1)(x-3)=0$

حل المتراجحة: $4x^2-13x+3\leq 4x^2+29$

42 1) عيّن قيم x التي من أجلها تتحقق المتراجحتان الآتيتان معًا:

$-3x+1>7x+11$ و $\frac{1}{2}x-3\leq x-1$

2) مثّل بيانيا هذه الحلول.

حل معادلات و متراجحات بالبرمجية جيوجبرا

تمرين 1

- حل المعادلة $53{,}794x + 851{,}163 = 13{,}237x + 999{,}872$.

حل

- انقر على Affichage ثم إختر Calcul formel

- احجز أسفل الصفحة جيوجبيرا المعادلة:
Calcul formel
1 53.794x+851.163=13.237x+999.872
ثم اضغط على ENTER

فيظهر مايلي :
1 53.794x + 851.163 = 13.237x + 999.872
$\rightarrow \frac{26897}{500}x + \frac{851163}{1000} = \frac{13237}{1000}x + \frac{124984}{125}$

- انقر على x= فيظهر حل المعادلة:
2 $1
Résoudre $\left\{x = \frac{11}{3}\right\}$

- انقر على x≈ فتظهر قيمة مقربة لحل المعادلة:
3 $2
NRésoudre $\{x = 3.67\}$

تمرين 2

حل بيانيا المتراجحة: $4x + 1 \geq 3x$.

حل

- احجز أسفل الصفحة جيوجبيرا المتراجحة: Saisie 4x+1≥3x ثم اضغط على ENTER

- في النافذة الجبرية
Algèbre
Inégalité
a : $4x + 1 \geq 3x$
اضغط باليمنى على المتراجحة

و اختر Propriétés ثم Style و حدّد ☑ Afficher sur axe des x .

فيظهر
-2 -1 0 1 2 3 4 5

ينتج أن حلول المتراجحة المقترحة هي كل قيم x الأكبر من أو تساوي -1.

دوري الآن

استعمال البرمجية جيوجيبرا لـ:

1) حل المعادلة $(x-2)^2 + x^2 - 4 = 0$.

2) حل بيانيا المتراجحة $x - 1 \leq 0$.

5 جُمل معادلتين من الدّرجة الأولى بمجهولين

سأتعلّم في هذا الباب

- حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين جبريا.
- حل مشكلات بتوظيف جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.

أبو كامل شجاع بن أسلم محمد (850م - 930م) عالم مصري اهتم بالحساب و الجبر و الهندسة.
و يُعرف أيضا باسم كامل الحاسب .
من مؤلفاته :«كتاب الجمع و التفريق» ،«كتاب المساحة و الهندسة و الجبر»، «كتاب الطرائق في الحساب»... وقد عكف على تطوير أبحاث الخوارزمي وحلّ مسائل كثيرة في الجبر و الهندسة بطرق مبتكرة لم يسبقه إليها أحد. كما أوجد الجذرين الحقيقيين للمعادلة الجبرية ذات الدرجة الثانية و وضع مسألة هذا نصها: «إذا وظفت أجيرا و اشترطت عليه أنه إذا عمل شهرا كاملا يتقاضى 6 دراهم و إذا انقطع عن العمل شهرا كاملا يدفع 4 دراهم و في أحد الشهور عمل و انقطع و في النهاية لم يدفع و لم يتقاض أي درهم. كم يوما عمل في الشهر؟»

أبو كامل شجاع

تحدٍّ



لتزيين قسمهم، جمع التلاميذ مبلغ 610DA مُشكّلا من 37 قطعة نقدية من فئتي 20DA و 10DA.

ما هو عدد القطع النقدية التي جمعها التلاميذ من كل فئة؟

أستعدّ

أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

1) إذا كان $5x = -3$ فإن $x = -3 - 5$.
2) حل المعادلة $5x = -8$ هو العدد 0.
3) العلاقة $x + 6 = 6x + 1$ هي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول x.
4) حل المعادلة $5x - 5 = 5 - 5x$ هو العدد 5.
5) من أجل $x = 1$ و $y = 0$ ، المساواة $2x - y = 0$ محققة.
6) من أجل $x = -3$ و $y = -2$ ، المساوتان $x - 2y = 7$ و $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = 0$ محققتان معا.
7) 4 هو حل للمعادلة $3 - 2x = 5$.
8) حل المعادلة $2x + 7 = 3 - x$ هو نفسه حل المعادلة $3x = -4$.
9) إذا كان $y + 2x = 1$ فإنّ $y = 1 + 2x$.
10) إذا كان $y + 2x = 1$ و $x = 3$ فإنّ $y = 5$.

1 جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

يعمل في مصلحة إدارية 32 عاملا. أُحيل 5 رجال و 3 نساء إلى التقاعد ولم يتم تعويضهم، فأصبح عدد النساء بالمصلحة ضعف عدد الرجال.

نريد معرفة عدد الرجال وعدد النساء العاملين بهذه المؤسسة قبل الإحالة على التقاعد.

أ) هل يمكن أن يكون عدد الرجال 24 وعدد النساء 8؟ اشرح.

ب) نرمز بـ x إلى عدد الرجال وبـ y إلى عدد النساء. بيّن أنّ الوضعية السابقة تُترجم بالمعادلتين الآتيتين معا:

$x+y=32...(1)$ و $2(x-5)=y-3...(2)$

جـ) بسط المعادلة (2)، وتحقّق أنّ المعادلتين محققتان معًا من أجل $x=13$ و $y=19$.

ولكنّهما غير محققتين معا من أجل $x=24$ و $y=8$.

نقول أنّ $\begin{cases} x+y=32 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ هي جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين، والثنائيّة $(13;19)$ هي حل لهذه الجملة.

د) استنتج عدد الرجال وعدد النساء العاملين بهذه المؤسسة قبل الإحالة على التقاعد.

2 حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين جبريا

إليك جملة المعادلتين الآتية: $\begin{cases} 2x+y=7...(1) \\ 3x-2y=4{,}2...(2) \end{cases}$

أ) تحقق أنّ الثنائيّة $(2;3)$ حل للمعادلة (1)؟ هل هي حل لجملة المعادلتين؟

ب) اقترح ثنائية أخرى حلا للمعادلة (1). هل هي حل لجملة المعادلتين؟

جـ) لحل هذه الجملة كتب تلميذان:

التلميذ 1	التلميذ 2
من المعادلتين (1) و (2) نحصل على المعادلة: $3x-2(7-2x)=4{,}2$ وهي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهول x وبحلها نجد $x=2{,}6$. وبالتعويض في إحدى المعادلتين (1) أو (2) نجد $y=1{,}8$.	بضرب المعادلة (1) في العدد 2 نجد $4x+2y=14$ وبالجمع مع المعادلة (2) طرفا الى طرف نجد المعادلة ذات المجهول x: $7x=18{,}2$ وهي المعادلة من الدرجة الأولى وبحلّها نجد $x=2{,}6$. وبالتعويض في إحدى المعادلتين (1) أو (2) نجد $y=1{,}8$.

1) اشرح عمل كل من التلميذين، واستنتج حل الجملة.

2) حل باستعمال الطريقتين السّابقتين جملة المعادلتين الآتية: $\begin{cases} x+4y=7 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$

3 حل مشكلات بتوظيف جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين


المتحف الوطني للمجاهد

يقترح متحف تذكرتين لعطلة نهاية الأسبوع:

- 300 DA للبالغين
- 150 DA للصّغار.

في هذا اليوم، استقبل المتحف 140 زائرا وبلغت مداخيله 30 300 DA.

أوجد عدد البالغين وعدد الصغار الذين زاروا المتحف هذا اليوم.

مراحل (خطوات الحل)	المهمات	حل
1) اختيار المجاهيل.	ما هي المجاهيل في هذه المشكلة؟	
2) ترجمة المشكلة بجملة معادلتين.	عبّر بدلالة المجاهيل السابقة عن المعلومة «استقبل المتحف 140 زائرا»	
	عبّر بدلالة المجاهيل السابقة عن المعلومة «بلغت مداخيل المتحف 30300DA»	
	ما هي جملة المعادلتين التي تترجم معطيات المشكلة؟	
3) حل الجملة	حل جملة المعادلتين باختيار طريقة مناسبة.	
4) تحقق	تحقق من صحة النتيجة.	
5) الإجابة	ترجم النتيجة واجب عن السؤال.	

1 جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تعريف

نسمّي جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y كل جملة من الشكل $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

حيث a ، b ، c و a' ، b' ، c' أعداد معلومة.

مثال

• الجملة $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-5y=4 \end{cases}$

هي جملة معادلتين من الدرجة الأولى ،

حيث $a=1$ ، $b=-1$ ، $c=2$

و $a'=2$ ، $b'=-5$ ، $c'=4$

2 حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين جبريا

تعريف

نسمّي حلا للجملة : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

كل ثنائية $(x_0 ; y_0)$ تكون من أجلها معادلتا الجملة محققتين في آن واحد.

حل جملة، يعني إيجاد كلّ الثنائيات $(x ; y)$ التي من أجلها تكون معادلتا الجملة محققتين في آن واحد.

في المثال أعلاه:

• من أجل $x=2$ و $y=0$ نجد: $2-0=2$ و $2(2)-5(0)=4$

منه الثنائية $(2 ; 0)$ حل للجملة.

• من أجل $x=3$ و $y=1$ نجد: $3-1=2$ و $2(3)-5(1)\neq 4$

منه الثنائية $(3 ; 1)$ ليست حلا للجملة.

ملاحظة

في الثنائية $(x ; y)$ الترتيب مهم، فمثلا: إنّ الثنائية $(2 ; 0)$ تختلف عن الثنائية $(0 ; 2)$

ففي الثنائية $(2 ; 0)$ لدينا $x=2$ و $y=0$

بينما في الثنائية $(0 ; 2)$ لدينا $x=0$ و $y=2$ وهي ليست حلا للجملة في المثال أعلاه.

حالات خاصة

1) الجملة $\begin{cases} 4x+6y=2 \\ -2x-3y=-1 \end{cases}$ تبسّط إلى الشّكل $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ أي معادلة واحدة بمجهولين $2x+3y=1$

وفيها يمكن حساب قيمة y من أجل أي قيمة نعطيها لـ x، إذن الجملة المعتبرة لها عدد غير منته من الحلول.

2) الجملة $\begin{cases} 2x-y=0 \\ -x+\frac{y}{2}=-2 \end{cases}$ تبسّط إلى الشّكل $\begin{cases} 2x-y=0 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ وهذا غير ممكن.

إذن الجملة المعتبرة ليس لها حلول.

• حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تمرين

حل كل من الجملتين: $(1)....\begin{cases}3x+y=-4\\x-y=2\end{cases}$ و $(2)....\begin{cases}4x+2y=9\\-4x+3y=6\end{cases}$

حل

حل الجملة (1) بطريقة التعويض.

من المعادلة $x-y=2$ ينتج أن $y=x-2$.

بتعويض y بالعبارة $x-2$ في المعادلة $3x+y=-4$ نجد:

$3x+(x-2)=-4$. هذه المعادلة تبسّط على الشكل $4x-2=-4$. إذن $4x=-2$. بالتالي $x=-\frac{1}{2}$

نعوض x بالعدد $-\frac{1}{2}$ في المعادلة $y=x-2$ ونجد $y=-\frac{1}{2}-2$. بالتالي $y=-\frac{5}{2}$.

إذن $x=-\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{5}{2}$.

للتحقق، نعوض x بالعدد $-\frac{1}{2}$ و y بالعدد $-\frac{5}{2}$ في الجملة المعطاة ونجد:

$3\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{2}=-4$ و $-\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)=2$

بالتالي الثنائية $\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$ تحقق الجملة (1).

إذن الثنائية $\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$ هي الحل الوحيد للجملة.

حل الجملة (2) بطريقة الجمع والتعويض.

بجمع المعادلتين في الجملة (2) طرفا بطرف، نحصل على: $5y=15$.

منه $y=3$.

بالتعويض عن قيمة y في إحدى المعادلتين، نجد:

$4x+2\times3=9$.

منه $x=\frac{3}{4}$.

للتحقق، نعوّض x بالقيمة $\frac{3}{4}$ و y بالقيمة 3 في المعادلتين ونجد:

$4\left(\frac{3}{4}\right)+2\times3=9$ و $-4\left(\frac{3}{4}\right)+3\times3=6$

أي أنّ الثنائية $\left(\frac{3}{4};3\right)$ تحقق الجملة (2).

إذن الثنائية $\left(\frac{3}{4};3\right)$ هي الحل الوحيد للجملة.

طريقة

لحل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين، يمكن استعمال إحدى الطريقتين:

- **طريقة التعويض:** بالتعبير عن أحد المجهولين بدلالة الآخر من إحدى المعادلتين، ثم تعويض ذلك المجهول بالعبارة الناتجة في المعادلة الأخرى.
- **طريقة الجمع:** نضرب طرفي كل معادلة بمعامل مناسب ثم نجمع المعادلتين طرفًا لطرف للحصول على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

دوري الآن

حل الجملتين الآتيتين مبيّنا طريقة الحل المستعملة. $\begin{cases}2x+y=6\\\frac{1}{2}x-y=-2\end{cases}$ ، $\begin{cases}6x-2y=8\\x+3y=1\end{cases}$.

المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

1 نعتبر المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين الآتية:

$x - 2y = 7$.

اذكر إن كانت كلّ من الثنائيات الآتية حلا لهذه المعادلة. علل.

أ) $(0\ ;\ 1)$ ب) $(7\ ;\ 0)$ جـ) $(1\ ;\ -3)$

2 أرفق بكل معادلة الثنائية أو الثنائيات (في حالة وجودها) التي هي حلول لها فيما يأتي:

أ) $3x + 2y = -1$	• $(0{,}5;-1{,}5)$
ب) $3x + 5y = 1$	• $(0;-2)$
جـ) $x - 2y = 4$	• $\left(0;\frac{1}{3}\right)$
د) $x - y = 2$	• $(1;-2)$
هـ) $5x + 3y = 1$	• $\left(\frac{1}{5};0\right)$

3 1) اذكر حلين مختلفين لكل معادلة من المعادلات الآتية:

أ) $x - y = 0$

ب) $4x + 2y = 5$

جـ) $4x - 5y = -2$

2) عيّن ذهنيا الثنائية حل كلّ جملة.

أ) $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 2x \end{cases}$

جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

4 أ) هل الثنائية $(3;-2)$ حل للجملة $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$؟

ب) نفس السؤال من أجل الثنائية $(1;2)$.

5 حل الجملتين الآتيتين باستعمال طريقة التعويض.

أ) $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 3a + 2b = 0 \\ 6a + 3b = -24 \end{cases}$

6 نفس التمرين مع الجملتين:

أ) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 5y = 21 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} d = 90t \\ d + 50t = 280 \end{cases}$

7 حل الجملتين الآتيتين باستعمال طريقة الجمع والتعويض.

أ) $\begin{cases} -x + 3y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 5x + 4y = 16 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$

8 نفس التمرين مع الجملتين:

أ) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 5y = 21 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 3x + 7y = 11 \\ -5x + 2y = 5 \end{cases}$

9 حل الجملتين الآتيتين باستعمال طريقة من اختيارك.

أ) $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} \frac{x}{6} - y = -1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

10 نفس التمرين السابق مع الجملتين:

أ) $\begin{cases} 3x = 2y \\ y = 3(x - 3) \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x = y \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

11 حل كلّ جملة باختيار طريقة مناسبة.

أ) $\begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 2y = 31 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 12x - y = -5 \end{cases}$

جـ) $\begin{cases} 6x - 5y = 0 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$ د) $\begin{cases} a - b = 6 \\ 3a - \frac{b}{2} = 3 \end{cases}$

12 حلّ الجملة باستعمال طريقة من اختيارك.

$$\begin{cases} x+3y=7 \\ 5y-2=3(x-1) \end{cases}$$

13 السؤال نفسه مع الجملة:

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ -3(x-y)=6 \end{cases}$$

حل مشكلات باستعمال جمل معادلتين

14 مجموع عددين a و b هو 133.

إذا أضفنا إلى كل منهما 5، أصبحت نسبتهما $\frac{4}{7}$.

ما هما العددان؟

15 نعتبر النسبة $\frac{a}{b}$ حيث $b \neq 0$.

إذا أضفنا 2 إلى البسط a، تكون النسبة تساوي 3.

إذا أنقصنا 2 من البسط a، تكون النسبة تساوي 4.

ما هي هذه النسبة؟

16 عددان مجموعهما يساوي 206.

عند قسمة أكبرهما على أصغرهما، يكون حاصل القسمة 4 وباقي القسمة 1 .

ما هما العددان؟

17 الفرق بين عددين هو 24. إذا أضفنا 8 إلى كل من العددين، نحصل على عددين آخرين أكبرهما هو ثلاث مرات أكثر من أصغرهما.

ما هما العددان؟

18 حقل مستطيل الشكل محيطه يساوي 220m.

عند إنقاص 2m من طوله وزيادة 2m إلى عرضه، تزداد مساحته بـ $16m^2$.

ما هما بعدا الحقل في البداية؟

19 في الشكل الآتي،

المثلث ABC متقايس الساقين.

(d) منصّف الزاوية $\widehat{C}$

يقطع [AB] في D

و AD = DC.

عيّن x و y قيسي الزاويتين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$.

20 يريد فلّاح أن يعرف عدد الأرانب وعدد الدجاج في مزرعته.

عندما عدّ الرؤوس، وجد 36 رأسا.

عندما عدّ السيقان، وجد 90 ساقا.

ما هو عدد الأرانب وعدد الدجاج في المزرعة؟

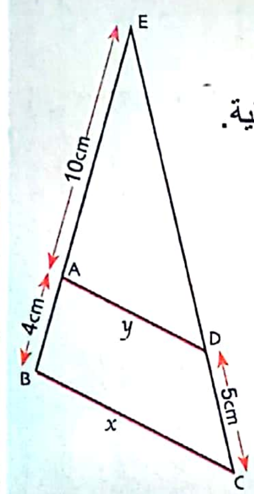
21 وحدة الطول هي السنتيمتر،

والأطوال على الشكل ليست حقيقية.

علما أنّ ABCD شبه منحرف

محيطه يساوي 13,8cm

احسب كلا من x و y.



في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة	الإجابات (1)	(2)	(3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	المعادلة $y = 8x - 1$ هي معادلة من الدرجة الأولى ...	ذات المجهول x	ذات المجهولين x وy.	ذات المجهول y.	58
2	الثنائية $(0;0)$ هي حل للمعادلة ...	$3x + y = 0$	$x - 3y = 0$	$\frac{1}{3}x - y = 3$	58
3	الثنائية $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ هي حل للمعادلة...	$x + y = 0$	$2x - \frac{1}{2}y = 0$	$\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{4} = 0$	58
4	الجملة $\begin{cases} 2a - b = 3 \\ a - 2b = -5 \end{cases}$ ...	هي جملة معادلتين ذات مجهول واحد.	ليست جملة معادلتين من الدرجة الأولى.	هي جملة معادلتين من الدرجة الأولى ذات المجهولين a و b.	58
5	إليك الجملة الآتية : $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ حل هذه الجملة هو ...	$(1;4)$	$(4;1)$	$\left(\frac{2}{3};3\right)$	59
6	من المعادلة $3x - y = 1$ ينتج أن...	$y = 3x - 1$	$x = \frac{y+1}{3}$	$3x = y + 1$	58
7	x و y قيسا زاويتين متكاملتين بالدرجات. يزيد x عن y بـ $15°$. لإيجاد x و y، نحل الجملة الآتية:	$\begin{cases} x + y = 180 \\ x = y + 15 \end{cases}$	$\begin{cases} y + x = 90 \\ y + 15 = x \end{cases}$	$\begin{cases} y = 180 - x \\ y + x = 15 \end{cases}$	58 و 59

أدمج تعلماتي

وضعية

بمناسبة الاحتفال بالمولد النبوي الشريف، نظمت بلدية حفل استقبال لفائدة التلاميذ النجباء للمؤسسات التعليمية التابعة لها، حضره ممثلون عن قطاع التربية وبعض الأولياء.

بهذه المناسبة، اقتنت البلدية 150 علبة عصير برتقال و 150 قطعة حلوى متماثلة ودفعت 11 250 DA لكل المصاريف. في نهاية الحفل، بقيت 24 علبة عصير و30 قطعة حلوى ثمنها معا 2 100 DA.

ما هو سعر علبة عصير وسعر قطعة حلوى؟

تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: • قراءة نص المشكل وتحديد المعطيات والمطلوب.
• كيف تجد روابط بين المعطيات والمفاهيم الرياضية المناسبة والمكتسبة.

تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل مناسبة: • ماهي المهمة المطلوب إنجازها؟ كيف يتم ذلك؟
• ماذا يلزمك لترييض الوضعية؟ • ماهي الموارد الرياضية (معارف وإجراءات) التي تسمح بحل هذه الوضعية؟

تنفيذ استراتيجية الحل المختارة: • ترييض الوضعية باختيار المجاهيل المناسبة وكتابة جملة المعادلتين التي تعبّر عن هذه المعطيات. • اختيار طريقة حل وتطبيقها. • التحقق من صحة الحل وتحرير الإجابة المناسبة.

22 حل الجملة الآتية

باستعمال طريقة من اختيارك. $\begin{cases} 8x + 3y = 39,5 \\ 7x + 9y = 50,5 \end{cases}$

23 حل الجملة

باستعمال طريقة من اختيارك. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x + 4y = -6 \end{cases}$

24 عددان طبيعيان مجموعهما 2019 والفرق بينهما 25.

عيّن هذين العددين.

25 مستطيل محيطه 60cm. إذا زدنا طوله بـ 5cm وأنقصنا عرضه بـ 2cm، بقيت مساحته نفسها.

عيّن بُعدَي هذا المستطيل.

26 اليوم، مجموع عمرَيْ أمين وحمزة هو 34 سنة.

بعد 4 سنوات، يصير عمر أمين ضعف عمر حمزة.

عيّن عمر أمين وعمر حمزة.

27 تزن 5 تفاحات و 3 إجاصات معا 1kg 50g. إذا علمت أنّ وزن إجّاصة هو $\frac{2}{3}$ وزن تفاحة.

عيّن وزن كلّ ثمرة.

(الثمرات متماثلة).

28 تنقّط أعمال التلاميذ على 20.

تحصّل تلميذ على علامة في فرض محروس بمعامل 2 وعلامة ثانية في واجب منزلي بمعامل 1 وكان معدله 11.

بتبادل المعاملين، كان معدل التلميذ 13.

ما هي العلامة التي تحصل عليها التلميذ في الفرض وفي الواجب المنزلي؟

29 تحصّل فلاّح مختص في تربية النحل على 7kg من العسل.

لتسويق هذه الكمية، تمكّن من توزيعها على 18 علبة زجاجية، بعضها من فئة 500g والأخرى من فئة 250g، ممتلئة بالعسل.

ما هو عدد قارورات كلّ فئة؟

30 خلال يوم واحد، سُحب من موزّع آلي للأوراق النقدية 356 ورقة نقدية كلها من فئة 1000DA أو 2000 DA.

وبلغ المبلغ الإجمالي الموزّع 454 000 DA.

ما هو عدد أوراق كلّ فئة؟

31 اشترى زبون من متجر كبير 6 علب من الحليب وقارورة عصير ودفع 720 DA. زبون آخر يملك بطاقة إخلاص تمكّنه من الاستفادة من تخفيض قدره 20% على ثمن كلّ مشترياته عند الدفع. اشترى هذا الزبون 5 علب من الحليب و5 قارورات عصير من النوع نفسه ودفع 1080 DA بعد استظهار بطاقته.

1) ماذا نعني بكلّ من x و y في المعادلة التي تترجم مشتريات الزبون الأوّل: $6x + y = 720$.

2) أ) اشرح لماذا عند تطبيق تخفيض بـ 20%، نضرب الثمن في 0,8.

ب) اكتب معادلة تعبّر عن مشتريات الزبون الثاني.

بيّن أنّ هذه المعادلة تكتب على الشكل: $x + y = 216$

3) حل الجملة: $\begin{cases} 6x + y = 720 \\ x + y = 270 \end{cases}$

4) ما هو سعر علبة الحليب وسعر قارورة العصير؟

حل جمل معادلات بالبرمجية جيوجبرا

تمرين

حل الجملة $\begin{cases} 8,749x + 9,435y = 10,121...(1) \\ 6,948x + 9,976y = 13,004...(2) \end{cases}$.

حل

طريقة 1

- تمثيل المعادلة (1) ثم المعادلة (2) بيانيا

أ) احجز أسفل الصفحة جيوجيبرا المعادلة (1): Saisie: 8.749x+9.435y=10.121

ثم اضغط على Enter فيظهر المستقيم f الذي معادلته (1) كما توضح النافذة الجبرية.

ب) ارسم بنفس الكيفية المستقيم g الذي معادلته (2).

- حل الجملة المعطاة

احجز أسفل الصفحة جيوجيبرا: Saisie: Intersection(f,g)

ثم اضغط على Enter فتظهر في النافذة الجبرية A(-1 ; 2) نقطة تقاطع المستقيمين f و g.

إذن $x = -1$ و $y = 2$ أي (-1 ; 2) هو حل الجملة.

طريقة 2

- تهيئة

انقر على Affichage ثم اختر Ctrl+Maj+K Calcul formel

- حجز المعادلتين (1) و (2)

أ) احجز المعادلة (1) في النافذة الظاهرة ثم اضغط على Enter

ب) احجز المعادلة (2) في النافذة الظاهرة ثم اضغط على Enter

Calcul formel

1	g 8.749x + 9.435y = 10.121 → g : $\frac{8749}{1000}x + \frac{1887}{200}y = \frac{10121}{1000}$
2	f 6.948x + 9.976y = 13.004 → f : $\frac{1737}{250}x + \frac{1247}{125}y = \frac{3251}{250}$

جـ) اضغط على اللمسة CTRL ثم انقر على 1 و على 2 ثم على x=

فيظهر حل الجملة التالي : 3 {g, f} Résoudre $\{\{x = -1, y = 2\}\}$.

دوري الآن

حل الجملة $\begin{cases} 1,732x + 1,414y = 8,024 \\ 7,459x - 3,141y = 16,095 \\ 9,703x - 5,152y = 39,413 \end{cases}$ باستعمال البرمجية جيوجبرا.

6 الدّالة الخطّيّة والتّناسبيّة

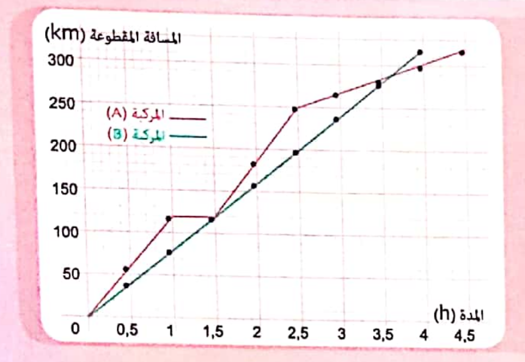
سأتعلّم في هذا الباب

- معرفة الترميز $x \longmapsto ax$ وتعيين صورة عدد بدالة خطية.
- تعيين عدد عُلِمَت صورته بدالة خطية.
- تعيين دالة خطية انطلاقا من عدد غير معدوم وصورته.
- تمثيل دالة خطية بيانيا.
- قراءة التمثيل البياني لدالة خطية وحساب معامل الدالة الخطية انطلاقا من تمثيلها البياني.
- تمثيل وقراءة وترجمة وضعية يتدخل فيها مقدار معطى بدلالة مقدار آخر.
- حلّ مشكلات تتدخل فيها النسبة المئوية أو المقادير المركّبة.

«عندما تسير سيارة بسرعة 100km/h بدلا من 80km/h فإنّ الرّبح في الوقت هو 15min فقط لكل 100km. فلا يُعقل أن يضحي أحد بنفسه أو بالآخرين وأن يتسبّب في حوادث مرور نتائجها مؤلمة من أجل أن يربح 15min في 100km!». تخلل الملتقى الدوليّ الأوّل حول «دراسات وممارسات في علم نفس المرور» الذي نُظِّم يومي 27 و28 أفريل 2016 بجامعة باتنة 1، تقديم إحصائيات حول حوادث المرور بالجزائر وأسبابها. فحسب المتدخلين، ومنهم مصالح الدرك الوطنيّ، تبيّن أن 37,62% من إجمالي الحوادث المسجلة سببها السرعة المفرطة وعدم ترك مسافة الأمان بين المركبات وبالتالي فإنّ العنصر البشري هو المتسبب الرئيس في هذه الحوادث.



سُجِّلت في التمثيل البياني المقابل المسافات التي قطعتها مركبتان A و B كل نصف ساعة من لحظة انطلاقهما.
احسب السرعة المتوسطة لكل مركبة خلال السفر. ثم صف حركة كل منهما. اشرح.



أستعدّ

أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

1) إذا كان $x = 3$ فإنّ $-3x - 1 = 10$.

2) إذا كان $-20 = 5 - x$ فإنّ $x = -15$.

3) إذا كان $-5x = 20$ فإنّ $x = 25$.

4) العدد الناقص في جدول التناسبية المقابل هو 9-.

-2	3
6	...

5) في متوسطة 260 تلميذا نصف داخلي وهو مايمثّل 65%. إذن العدد الإجمالي لتلاميذ المتوسطة هو 400.

6) أخذ 2% من 150DA معناه أخذ 3DA.

7) سعر جهاز هو 12 850DA.
بعد زيادة بنسبة 8%، أصبح سعره 13 800DA.

8) سعر جهاز هو 6 900DA.
تخفيض بـ 15% على سعر الجهاز يقدر بـ 1 380DA.

9) قطع درّاج مسافة 30km في مدة زمنية قدرها 1h30min.
إذن السرعة المتوسطة للدرّاج تساوي 20km/h.

1 تعيين دالة خطية

• قرر تاجر تخفيض ثمن سلعه بـ 2% بمناسبة عيد الفطر.

السعر قبل التخفيض (DA)	50	100	150	200
السعر بعد التخفيض (DA)	...	...	...	...

1) انقل الجدول المقابل و أتممه:

بيّن أنّ هذا الجدول هو جدول تناسبية، وعيّن معامل التناسبية.

2) نسمي x السعر قبل التخفيض ونرمز بـ $f(x)$ للسعر بعد التخفيض.

لاحظ أنه من أجل أي قيمة نعطيها لـ x يمكن حساب قيمة $f(x)$. احسب $f(120)$.

لاحظ كذلك أنه يمكن حساب x إذا عُلم $f(x)$. احسب العدد x في كل من الحالتين $f(x) = 6$ ثم $f(x) = 1,4$

نقول أنّنا عرّفنا دالة ترفق بكل عدد x العدد $f(x)$. نرمز لهذه الدالة بـ $f : x \longmapsto f(x)$

3) تحقّق من أنّ عبارة $f(x)$ بدلالة x هي من الشكل: $f(x) = ax$ حيث a عدد ثابت يطلب تعيينه.

نسمي دالة f من الشكل $f(x) = ax$ حيث a عدد معلوم، دالة خطية معاملها a.

2 تمييز دوال خطية

1) أرفق بكلّ جدول العبارة الموافقة من بين : أ) $x \longmapsto x^2$ ؛ ب) $x \longmapsto 2x$ ؛ جـ) $x \longmapsto 2x - 1$.

الجدول ①

-2	1,5	3	4,5
-5	2	5	8

الجدول ②

-2	0,5	2,5	3
-4	1	5	6

الجدول ③

-3	0	1	3
9	0	1	9

2) تحقّق من أنّ الجداول التي تمثّل وضعيات تناسبية فقط تكون مرتبطة بدوال خطية.

3) عيّن الدوال الخطية من بين الدوال: أ) $x \longmapsto x^2$ ؛ ب) $x \longmapsto 2x$ ؛ جـ) $x \longmapsto 2x - 1$.

3 تمثيل دالة خطية بيانيا

نعتبر الدالة الخطيّة $f : x \longmapsto 0,5x$. المستوى مزوّد بمعلم متعامد و متجانس مبدؤه O.

1) أ) انقل ثمّ أكمل الجدول.

x	0	1	4
$f(x)$			

ب) علّم النّقطتين $A(1; f(1))$، $B(4; f(4))$، وماذا تقول حول استقامية النقط O، A، B؟ برّر جوابك.

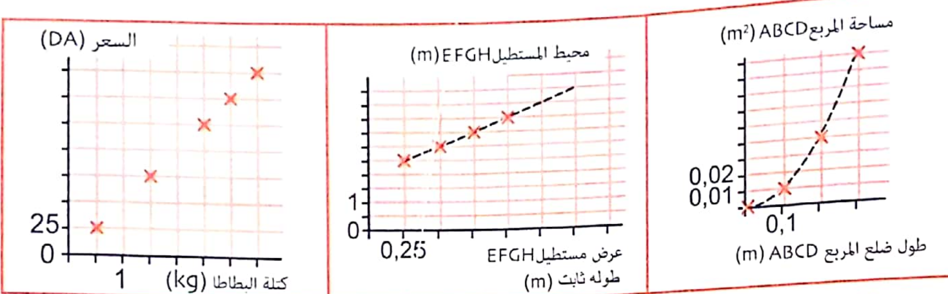
2) أ) عيّن على المستقيم (OA) النقطة C ذات الفاصلة -2، ثمّ إقرأ بيانيا ترتيبها، وقارن بين $f(-2)$ وترتيب C.

ب) لتكن $M(x; y)$ نقطة من المستقيم (OA)، عبّر عن y بدلالة x.

نقول أنّ التمثيل البياني للدالة الخطية $f : x \longmapsto 0,5x$ هو المستقيم (OA).

4 تمثيل وضعيات يعطى فيها مقدار بدلالة مقدار آخر وقراءتها وترجمتها

من بين التمثيلات البيانية التالية، ما هو التمثيل الذي يعبّر عن وضعية تناسبية؟ عين عندئذ معامل التناسبية a.
أعط تفسيرا هندسيا للعدد a.



5 استعمال النسبة المئوية

• إليك توزيع تلاميذ متوسطة حسب المستوى والجنس.

المستوى	السنة الأولى	السنة الثانية	السنة الثالثة	السنة الرابعة
عدد التلاميذ	100	95	90	90
النسبة المئوية للبنات	50%	40%	60%	70%

احسب النسبة المئوية للبنات في هذه المتوسطة.

• تستهلك سيارة 6,7L من البنزين لكل 100km.

بعد ضبط المحرك، انخفض استهلاك البنزين إلى 6,1L لكل 100km.

عبّر عن هذا الانخفاض بواسطة نسبة مئوية.

• أقدم تاجر على رفع سعر منتوج بـ 5%.

أ) إذا علمت أن سعر المنتوج قبل الزيادة هو 1200DA ، فما هو سعره بعد هذه الزيادة؟

ب) عبّر عن السعر y للمنتوج بعد الزيادة بدلالة السعر x قبل الزيادة.

6 المقادير المركّبة



• تسير سيارة بسرعة متوسطة قدرها 25m/s على طريق حُدّدت السرعة القصوى فيه بـ 80km/h. هل ارتكب سائق هذه السيّارة مخالفة ؟



• تُوَفِّر محطة توزيع المياه الصالحة للشرب 7 200 000L في الساعة .

عبّر عن تدفق المياه من هذه المحطة بالوحدة متر مكعب في الثانية الواحدة (m^3/s).

• يزن $3dm^3$ من الذهب 57,9kg ويزن $6cm^3$ من الفضة 63g، أما $6cm^3$ من النحاس فيَزن 71,2g. ماهو المعدن الأثقل؟

1 الدّالة الخطية

تعريف

a عدد معطى.

عندما نرفق كل عدد x بالجداء $a\times x$ نقول أننا عرّفنا دالة خطية f معاملها a.

- العدد $a\times x$ يسمى صورة x بالدّالة f ونرمز لهذه الصورة بالرمز $f(x)$ ونكتب $f(x) = ax$.
- نرمز لهذه الدّالة بـ $f : x \longmapsto ax$

مثال

$f : x \longmapsto 80x$ هي دّالة خطية معاملها $a = 80$.

كلّ من $g : x \longmapsto 4x - 3$ ، $h : x \longmapsto x^2$ ليست دالة خطية.

2 الدّالة الخطية والتناسبية

تعريف وخاصية

جدول قيم دالة خطية هو جدول فيه أعداد السّطر الثاني هي صور أعداد السّطر الأول بالدالة الخطيّة.

جدول قيم دالة خطية هو جدول تناسبية.

معامل الدالة الخطية هو معامل تناسبية لهذا الجدول.

مثال

f هي الدّالة الخطية المعرّفة بالشّكل : $f(x) = -3x$.

جدول القيم للدالة f الآتي هو جدول تناسبية.

x	-3	-2	-1,5	-1	0	0,5
$f(x)$	9	6	4,5	3	0	-1,5

x(-3)

(-3) هو معامل تناسبية لهذا الجدول وهو أيضا معامل الدالة الخطية.

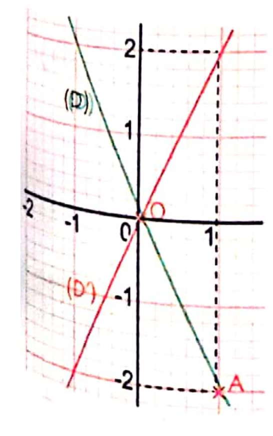
3 التمثيل البياني لدالة خطية

خاصية

في مَعلم، التمثيل البياني لدالة خطية معاملها a هو مستقيم يشمل المبدأ O.

نقول إنّ $y = ax$ هي معادلة لهذا المستقيم و a هو معامل توجيه له.

مثال



التمثيل البياني للدّالة الخطية $f : x \longmapsto -2x$ هو مستقيم يشمل المبدأ O.

لإنشائه يكفي تعيين نقطة ثانية من (D)، مثلا النقطة $A(1 ; -2)$.

(D′) هو التمثيل البياني للدالة $g : x \longmapsto 2x$.

ملاحظة : يعيّن المعامل a للدالة الخطية منحى المستقيم (D).

- إذا كان $a > 0$ فإن (D) «يصعد» من اليسار إلى اليمين.
- إذا كان $a < 0$ فإنّ (D) «ينزل» من اليسار إلى اليمين.

• تعيين دالة خطية انطلاقا من عدد وصورته

تمرين

عيّن الدّالة الخطية g إذا علمت أن $g(-2) = 6$.

حل

الدّالة g من الشكل $g(x) = ax$. إذن $g(-2) = 6$ معناه $-2a = 6$ أي $a = -3$ بالتالي $g(x) = -3x$.

طريقة

لتعيين دالة خطية g علما أن $g(m) = n$ ، نحل المعادلة $am = n$ ذات المجهول a.

• قراءة تمثيل بياني لدالة خطية

تمرين

المستقيم (D) يمثل بيان دالة خطية f.

بقراءة بيانية عيّن: أ) صورة 4 ب) عيّن العدد الذي صورته 3,5.

حل

أ) صورة 4 هي 1,6. إذن $f(4) = 1,6$.

ب) 8,75 هو العدد الذي صورته 3,5. إذن $f(8,75) = 3,5$.

طريقة

• لتعيين صورة عدد بدالة ، نقرأ ترتيب النقطة من التمثيل البياني التي فاصلتها هذا العدد.

• لتعيين عدد صورته معلومة b بدالة، نقرأ فاصلة النقطة من التمثيل البياني التي ترتيبها b.

• تمثيل دالة خطية بيانيا

تمرين

في معلم مبدؤه O (الوحدة : 1cm) ارسم المستقيم (d) الذي يمثّل الدالة الخطية المعرّفة بـ: $f(x) = 1,5x$.

حل

(d) يشمل مبدأ المَعلم.

$f(1) = 1,5$ ، إذن (d) يشمل أيضا النقطة $A(1 ; 1,5)$.

نرسم المستقيم الذي يشمل المبدأ و النقطة $A(1 ; 1,5)$.

طريقة

باعتبار أنّ التمثيل البياني لدالة خطية مستقيم يشمل مبدأ المعلم، فلإنشائه يكفي تعيين إحداثيي نقطة أخرى منه.

دوري الآن

جد العبارة الجبرية للدّالة الخطية التي تمثيلها البياني (D) يشمل النقطة $A\left(-\frac{2}{3} ; -\frac{3}{2}\right)$. ومثّلها بيانيا.

هل النقطة $B\left(\sqrt{32} ; \sqrt{162}\right)$ تنتمي إلى (D)؟ لماذا؟

4 تطبيقات التناسبية

الدوال الخطية والنسب المئوية

	أخذ t % من x يعني ضرب x في $\frac{t}{100}$	زيادة x بـ t % يعني ضرب x في $1+\frac{t}{100}$	تخفيض x بـ t % يعني ضرب x في $1-\frac{t}{100}$
الدالة الخطية المرفقة	$x \longmapsto \frac{t}{100}x$	$x \longmapsto \left(1+\frac{t}{100}\right)x$	$x \longmapsto \left(1-\frac{t}{100}\right)x$

- أخذ 5% من x يعني ضرب x في 0,05 والدالة الخطية المرفقة هي $x \longmapsto 0,05x$.
- زيادة x بـ 5% يعني ضرب x في 1,05 والدالة الخطية المرفقة هي $x \longmapsto 1,05x$.
- تخفيض x بـ 5% يعني ضرب x في 0,95 والدالة الخطية المرفقة هي $x \longmapsto 0,95x$.

المقادير المركبة

عندما نحسب جداء مقدارين نتحصل على مقدار جداء.

أمثلة

- مساحة مستطيل

طول مستطيل هو 8cm وعرضه 3cm.

مساحته هي $(8 \times 3)cm^2$ أي $24cm^2$.

$\mathcal{A}$ هي مساحة مستطيل، L طوله و ℓ عرضه.

نكتب $\mathcal{A} = L \times \ell$. $\mathcal{A}$ هو مقدار جداء.

- الطاقة الكهربائية

يستهلك جهاز كهربائي 1,2kw في 1h في 5h، يستهلك هذا الجهاز $1,2kw \times 5h$ أي 6kw/h. إذن الطاقة الكهربائية E التي يستهلكها جهاز إستطاعته P في مدة زمنية t هي $E = P \times t$.

مقدار حاصل القسمة

عندما نحسب حاصل قسمة مقدارين، نتحصل على مقدار حاصل القسمة.

أمثلة

- السرعة المتوسطة لمتحرك هي حاصل قسمة المسافة المقطوعة على مدة قطع هذه المسافة.

نكتب $v(km/h) = \frac{d(km)}{t(h)}$ أو $v(m/s) = \frac{d(m)}{t(s)}$.

- الكتلة الحجمية لجسم هي حاصل قسمة كتلة هذا الجسم على حجمه.

نكتب $m_v = \frac{m}{v}(kg/m^3)$. السرعة المتوسطة لدراجة عندما تقطع مسافة 42km في 1,5h هي $\left(\frac{42}{1,5}\right)km/h$ أي 28km/h .

- الكتلة الحجمية لجسم كتلته 2,4kg وحجمه $0,01m^3$ هي $\left(\frac{2,4}{0,01}\right)kg/m^3$ أي $240kg/m^3$.

• تمثيل وقراءة وترجمة وضعية يتدخل فيها مقدار يعطى بدلالة مقدار آخر

تمرين : يستطيل نابض بشكل متناسب مع الكتلة المعلقة به.
نعلق جسما كتلته x (بالغرام) ونسجّل في كل مرة الاستطالة y (بالسنتيمتر).
1) انقل وأتمم الجدول المقابل ومثّله بيانيا ثم عبّر عن y بدلالة x.

x (غرام)	2	...	4	...
y (سنتيمتر)	0,6	0,9	...	1,5

2) أ) عيّن استطالة النابض من أجل كتلة قدرها 10g.
ب) ما هي الكتلة التي يمكن تعليقها للحصول على استطالة قدرها 2,1cm ؟

حل : 1) الجدول المعطى جدول تناسبية نعيّن قيم السطر الثاني من جدول التناسبية بضرب قيم السطر الأول في معامل التناسبية 0,3.

x	2	3	4	5
y	0,6	0,9	1,2	1,5

نمثل بيانيا هذا الجدول في معلم بالنقط الآتية:
A(2 ; 0,6) ، B(3 ; 0,9) ، C(4 ;1,2) ، D(5 ;1,5) .
نستنتج أن $y = 0,3\,x$.

2) أ) من أجل $x = 10$ نجد $y = 0,3 \times 10$ أي عندما نعلق جسما كتلته 10g نتحصل على استطالة النابض قدرها 3cm.
ب) لدينا $0,3 \times 7 = 2,1$. إذن نتحصل على استطالة قدرها 2,1cm عندما نعلق كتلة قدرها 7g.

طريقة
لحساب مقدار بدلالة مقدار آخر يمكن الاستعانة بجدول تناسبية.

• استعمال النسب المئوية

تمرين : خزان ماء مملوء تبلغ سعته $30m^3$. أفرغنا 30% منه ثم أضفنا 15% مما فيه.
كم أصبح حجم محتواه؟

حل : يصبح حجم الماء في الخزان $24,15m^3$ لأن $30 \times \left(1 - \frac{30}{100}\right) \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 24,15$.

طريقة
تخفيض x بـ t% ثم زيادة الناتج بـ t'%، يعني ضرب x في الجداء $\left(1 - \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t'}{100}\right)$.

• استعمال المقادير المركبة

تمرين : تبلغ مساحة الجزائر $2\,381\,740km^2$ وعدد سكانها 41,2 مليون في سنة 2017.
ما هي الكثافة السكانية؟

حل : كثافة السكان في الجزائر هي حوالي 17 نسمة في الكيلومتر المربع لأن $\frac{41,2}{2,381740} \simeq 17,298$.

طريقة
نحسب الكثافة السكانية في منطقة بقسمة عدد سكانها على مساحتها بالكيلومتر المربع.

دوري الآن
كان سعر سيارة 1 800 000DA. ارتفع سعرها بـ 3% ثم انخفض بـ 2% ثم انخفض مرة أخرى بـ 1%.
في أي عدد يجب ضرب 1 800 000 لإيجاد السعر الجديد؟

تعيين دالة خطية

1 سعر سروال هو2500DA. أصبح هذا السعر 2400DA بعد التخفيض.
عيّن الدّالة الخطية التي تنمذج هذه الوضعية.
ما هي نسبة هذا التخفيض؟

2 عيّن الدّالة الخطية التي تمثيلها البياني هوالمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(1;\sqrt{3}-\sqrt{2})$.
هل النقطة $A'(\sqrt{3}-\sqrt{2};\sqrt{3}+\sqrt{2})$ تنتمي إلى المستقيم (D)؟

3 خفّض تاجر سعر منتوج بـ 5%.
1) عبّر عن السعر y للمنتوج بعد التخفيض بدلالة السعر x قبل التخفيض.
2) إذا كان سعر المنتوج هو1200DA قبل التخفيض فماهوسعره بعد التخفيض؟
3) إذا كان سعر المنتوج هو1900DA بعد التخفيض فما هو سعره قبل الزيادة؟

4 سعر حذاء هو3000DA. أصبح هذا السعر بعد الزيادة 3240DA.
1) ما هومعامل الدّالة الخطية التي تنمذج هذه الوضعية؟
2) استنتج النسبة المئوية لهذه الزيادة.

5 عندما يتجمد الماء يزداد حجمه بنحو 8%.
1) في أي عدد يجب ضرب حجم الماء للحصول على حجم الجليد؟
2) نسمي f الدّالة التي ترفق بكل x سنتيمتر مكعب من الماء الحجم $f(x)$ للجليد الناتج.
هل f دالة خطية؟
في حالة الإيجاب، عيّن معاملها.

6 عيّن الدّالة الخطية g إذا علمت أن $g\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{-3}{5}$.

7 هل الدّوال التالية دوال خطية؟ في حالة الإيجاب عيّن المعامل.
$f:x\longmapsto 3\pi x$ ، $g:x\longmapsto 3x+\sqrt{2}$ ، $h:x\longmapsto x^2$.

تعيين صورة عدد وتعيين عدد صورته معلومة

8 f هي الدّالة الخطية المعرّفة بالدّستور $f(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$
1) احسب $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ، $f(-2)$ ، $f(4)$.
2) عيّن صور الأعداد 3- ، 6 ، 0.
3) عيّن العدد الذي صورته $\sqrt{3}$.
4) عيّن العدد الذي صورته $\sqrt{12}$.

9 f هي الدّالة الخطية التي معاملها 2,1.
انقل الجدول التالي ثم أتممه:

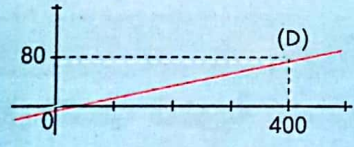
x	-3	...	...	...
$f(x)$	...	0	14,7	-2,1

10 النقطة $M\left(\frac{2}{7};-\frac{1}{3}\right)$ تنتمي إلى المستقيم الذي يمثل الدّالة الخطية f.
انقل ثم أتمم الجدول التالي

x	2	...	0	10
$f(x)$	...	-3	...	...

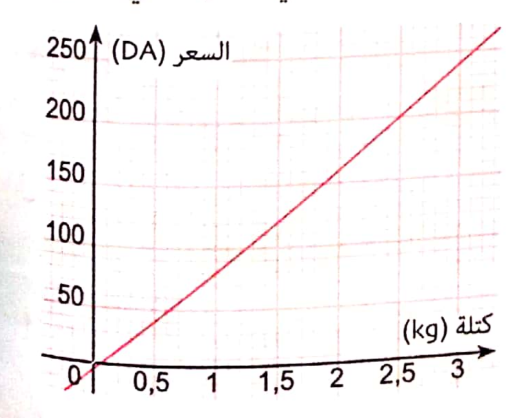
تمثيل دالة خطية وقراءة تمثيل بياني

11 في المعلم أدناه المستقيم (D) هو التمثيل البياني للدالة f



1) احسب $f(1954)$ و $f(2018)$.
2) عيّن العدد الذي صورته 085 10.

12 يبيّن الشكل أدناه تمثيلا بيانيا لسعر نوع من الفواكه (بالدينار) حسب كتلتها (بالكيلوغرام).
ماهوسعر 2,5kg من هذه الفواكه؟
دفع زبون 120DA. ما هي الكمية التي اشتراها؟



13 مثّل بيانيا الدّوال التالية:

$h: \longmapsto \frac{2}{3}x$ ، $g: x \longmapsto \frac{3}{2}x$ ، $f: x \longmapsto \frac{-3}{2}x$

14 (D) هو المستقيم الذي يمثل بيان الدّالة $f: x \longmapsto -3,2x$

هل النقط $A(2,5 ; 8,5)$، $B(5 ; 16)$، $C(10 ; 32)$

تنتمي إلى (D)؟ اشرح.

15 نعتبر الدّالة الخطية h حيث $h(-2.5) = 4$.

1) مثّل بيانيا الدّالة h. 2) ماهومعامل الدّالة h؟

3) عيّن العدد الذي صورته 2,5.

التعرف على وضعية تناسبية

16 عيّن العدد b إذا علمت أن الجدول الآتي جدول تناسبية.

4	b -1
1 - b	-16

17 نعتبر قرصا نصف قطره r .

محيطه P ومساحته A .

r (بالمتر)	2,5	3	8	9,5
P (بالمتر)	5π			
A (بالمتر المربع)				$90,25\pi$

1) انقل الجدول السابق وأتممه.

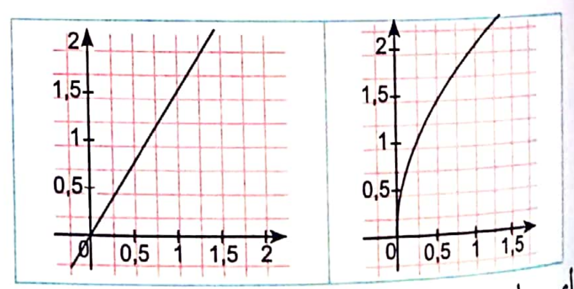
2) هل A وP متناسبان؟

في حالة الإيجاب عيّن معامل التناسبية.

3) هل A وr متناسبان؟

في حالة الإيجاب عيّن معامل التناسبية.

18 إليك التمثيلين البيانيين التاليين.



أي بيان منهما يمثل وضعية تناسبية؟ما هوعندئذ معامل التناسبية؟

استعمال النسب المئوية

19 1) اكتب عبارة الدّالة الخطية التي تُترجم أخذ t% من مقدار x.

2) يوجد في كيس 30 برتقالة و 10 تفاحات.

أخذ أحمد 20% من البرتقالات وأخذت لينة 30% من التفّاحات. ما هو عدد الفواكه التي بقيت في الكيس؟

20 سعر كتاب هو 560DA، خفض هذا السعر بـ 6%.

ما هوالسعر الجديد لهذا الكتاب؟

21 1) اكتب عبارة الدّالة الخطّية التي تترجم انخفاض مقدار x بنسبة 15%.

2) انخفض عدد رؤوس قطيع من الحيوانات المكوّن من 40 رأسا بـ 15%. ما هوعدد رؤوس القطيع بعد هذا الانخفاض؟

22 1) من بين الدّوال الآتية، ميّز تلك التي تعبّر عن زيادة 5% في مقدار x.

أ) $f: x \longmapsto 0,05x$ ب) $g: x \longmapsto 1,05x$

جـ) $h: x \longmapsto 0,95x$

2) راتب عامل مصنع هو25 000DA شهريا.

استفاد هذا العامل من زيادة قدرها 5%.

ما هو راتبه الجديد؟

23 سعر بذلة قبل التخفيض 4500DA وبعد التخفيض 4140DA. ما هي نسبة هذا التخفيض؟

24 تباع غسالة بـ 48 000DA. خضع سعرها إلى تخفيضين متتابعين قدرهما 3% و 4%.

1) ما هو السعر الجديد للغسالة؟

2) ما هي النسبة المئوية الكلية للتخفيض؟

المقادير المركبة

25 يمثل الماء 75% من كتلة جسم الإنسان.

1) ما هي كتلة الماء وحجمه لشخص يزن 63kg إذا علمت أن الكتلة الحجمية للماء هي $1g/cm^3$.

2) عيّن كتلة شخص إذا علمت أنّ حجم الماء المتواجد في جسمه هو47L.

26 الكتلة الحجمية للزئبق تساوي 13600 كيلوغرام لكل متر مكعب.

احسب بالسنتيمتر المكعب حجم كيلوغرام واحد من الزئبق.

27 يبلغ متوسط تدفق نهر $2200m^3/s$.

عبّر عن هذه التدفقات باللتر في الدقيقة.

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة	الإجابات (1)	(2)	(3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	معامل الدّالة الخطية التي تمثيلها البياني يشمل النقطة $A(2\,;\,7)$ هو:	2	3,5	7	68
2	9- هي صورة 6- بالدّالة الخطية :	$f:x\longmapsto -\frac{6}{4}x$	$g:x\longmapsto 1{,}5x$	$h:x\longmapsto -\frac{4}{6}x$	69
3	8 هو العدد الذي صورته 14 بالدّالة الخطية:	$f:x\longmapsto 1{,}75x$	$g:x\longmapsto \frac{8}{14}x$	$h:x\longmapsto \frac{4}{7}x$	69
4	المستقيم (D) أدناه هو التمثيل البياني للدّالة :	$f:x\longmapsto x+0{,}25$	$g:x\longmapsto 0{,}75x$	$h:x\longmapsto 0{,}25x$	68 و 69
5	f دالة خطية حيث $f(m)=n$ و $m\neq 0$ ، معاملها هو:	$\frac{n}{m}$	mn	n	68 و 69
6	معامل الدّالة الخطية f هو: (x: -5, 25, 10 ؛ f(x): 2, -10, -4)	$\frac{52}{130}$	-0,4	$-\frac{5}{2}$	68
7	$7cm^3$ من الذهب يزن 135,1g. إذن الكتلة الحجمية للذهب هي :	$19\,300kg/m^3$	19,3kg/L	$19{,}3g/cm^3$	70 و 71
8	يمكن ترجمة خفض مقدار بـ 10% بالدّالة الخطية :	$f:x\longmapsto 0{,}9x$	$g:x\longmapsto x-10$	$h:x\longmapsto \frac{10}{100}x$	70 و 71

جدول السؤال 6:

x	-5	25	10
$f(x)$	2	-10	-4

أدمج تعلّماتي

وضعية

1) ينطلق مصعد هوائي من ارتفاع 900m ليصل ارتفاع 1400m (الشكل).
ما هي المدة الزمنية (مقدّرة بالدقائق والثواني) لصعود واحد، إذا كانت سرعة المصعد الهوائي 5,5m/s؟

2) ليكن x سعر التذكرة لشخص بالغ لرحلة واحدة (ذهابا وإيابا).
أ) عبّر عن تكلفة الرحلة بدلالة x لعائلة متكوّنة من شخصين بالغين و 3 أطفال، علما أنّ كلّ طفل يستفيد من تخفيض قدرة 40% من قيمة x.
ب) ما هي أكبر قيمة لسعر التذكرة التي تسمح للعائلة بدفع ثمن الرحلة في حدود المبلغ المخصص لذلك والمقدر بـ 2000DA؟

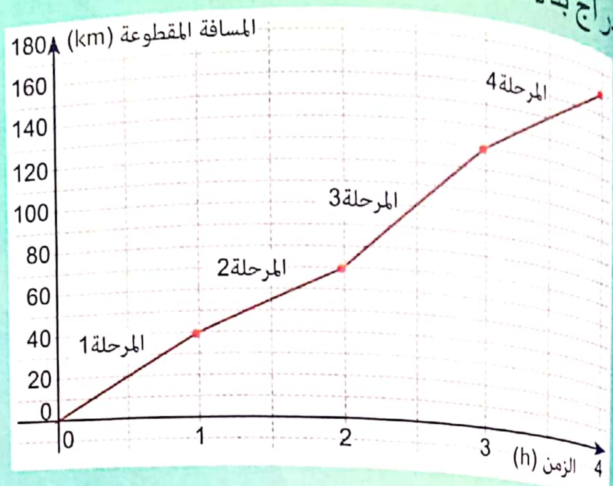
تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: قراءة نصّ المشكلة وفهم معاني المفردات الواردة فيه.
فهم الوضعية وتشكيل صورة ذهنية لها. فهم التعليمات وإدراك المهمة المركّبة: التعبير عن تكلفة الرحلة بدلالة المتغيّر (سعر تذكرة الشخص البالغ) تعيين طبيعة الدالة.

تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل مناسبة: يتعلق الجزء الأول من المشكل بتعيين المدة الزمنية التي يستغرقها المصعد للانتقال من A إلى B. لذلك، نحتاج إلى تعيين المسافة AB. استغلال الفرق في الارتفاعين A و B والمعلومات الواردة على الرسم التخطيطي للمكان. في الجزء الثاني، يتعلق الأمر بتعيين عبارة تكلفة الرحلة بالنسبة إلى كلّ العائلة بدلالة سعر تذكرة شخص بالغ. عدة متغيرات يجب اعتبارها، منها تشكيل العائلة، تخفيض سعر التذكرة بالنسبة لكل طفل، حدود إمكانيات العائلة.

تنفيذ استراتيجية الحل المختارة: نوظف مبرهنة فيثاغورس ونمثل بيانيا الدّالة الخطية التي ترفق بكل قيمة لـ x تكلفة الرحلة.

28 إليك التمثيل البياني للمسافة المقطوعة لدراج بدلالة المدّة الزمنية المستغرقة.



بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية :

أ) ما هي المسافة الكلية المقطوعة؟

ب) ما هي المدة الزمنية التي يستغرقها الدراج لقطع 100 كيلومتر الأولى؟

ج) ما هي المسافة المقطوعة خلال نصف الساعة الأخيرة؟

د) عيّن سرعة الدّراج في المرحلة الأولى.

29 كان سعر منتوج x دينار.

بعد زيادة بـ $t\%$ متبوعة بتخفيض قدره هو نسبة هذه الزيادة، أصبح السعر الجديد y.

عبّر عن السعر الجديد y بدلالة x و t.

30 عيّن ثمّ مثّل بيانيا الدّالة الخطية f التي تحقّق:

$$f(x+\sqrt{2})-f(x-\sqrt{2})=4$$

31 تقترح شركة سيارات أجرة تسعيرتين للمسافة 500km.

التسعيرة الأولى: 20DA للكيلومتر الواحد.

التسعيرة الثانية: مبلغ ثابت قدره 4000DA.

استعمل تمثيلا بيانيا لتحديد أفضل التسعيرتين.

32 هل الدّالة g المعرّفة بالدستور :

$$g(x)=x\sqrt{8}\left(\frac{1}{2}-x\sqrt{2}\right)+8-16\left(\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)^2$$

دالة خطية؟ في حالة الإيجاب عيّن معاملها.

33 1) حل بيانيا ثم جبريا المعادلة $-\frac{5}{2}x=4$

2) حل بيانيا ثم جبريا المتراجحة $-\frac{5}{2}x\leqslant 3$

34 قدم تاجر العرض الترويجي التالي:

من 1 أفريل 2018 إلى 5 أفريل 2018
خفض 10DA
لكل شراء قدره 1000DA

اشترى سليمان جهاز كمبيوتر بـ 48 000DA وقرص فلاش بـ 2400DA.

ما هو المبلغ الذي دفعه؟

35 بلغ حجم المياه بأحد السدود $20\,000\,000m^3$.

في سنة 2016 ارتفع مخزون المياه بنسبة قدرها 10%.

في سنة 2017 انخفض المخزون بنسبة 8%.

ما هوحجم المياه المخزنة في السنة 2017؟

36 في قسم متكوّن من 30 تلميذا، 20 منهم يدرسون اللغة الإنجليزية و10 يدرسون اللغة الألمانية.

60% من التلاميذ الذين يدرسون الإنجليزية يمارسون رياضة كرة القدم و70% من الذين يدرسون الألمانية يمارسون أيضا هذه الرياضة.

ما هي النسبة المئوية لتلاميذ هذا القسم الذين يمارسون كرة القدم؟

37 يجب ألّا تتجاوز الكتلة الحجمية لنترات مياه الشرب 45mg/L. كأس سعته 13cL. عند ملئه بالماء تتحصل على 8mg من النترات.

هل يمكن أن نقول أن هذا الماء صالح للشرب؟

38 هل صحيح أنه إذا كان سُدس عدد الناخبين في انتخابات لم يصوتوا، فإنه يمكن القول أن 80% منهم صوتوا؟

39 500mL من عصير البرتقال يحتوي على 40cg من السكر.

وجد عبد الحميد هذا المشروب حلوًا جدا فأضاف له 40mL من الماء.

ما هو تركيز السكر في المشروب الجديد؟

1) تمثيل جدول قيم مساعدة باستعمال البرمجية جيوجيبرا

استعمل البرمجية جيوجيبرا لتمثيل الجدول التالي بيانيا:

t	1	2	3
$f(t)$	2	4	6

أ) فتح المجدول وحجز الجدول

- اضغط على Affichage واختر  Tableur .
- احجز جدول القيم المعطى:

	A	B	C	D
1	t	1	2	3
2	f(t)	2	4	6

ب) تمثيل الجدول

حدّد الخلايا B1، C1، D1، B2، C2، D2 واضغط باليمنى على المنطقة المحددة ثم على Créer

واختر Liste de points .

ملاحظة: ماذا يظهر إذا اخترت Ligne brisée بدل Liste de points؟

2) تمثيل دالة خطية بيانيا باستعمال البرمجية جيوجيبرا

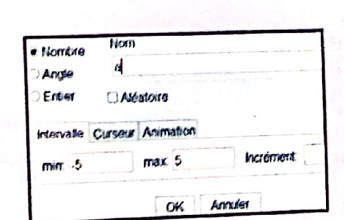
أ) لتمثيل الدّالة الخطية f بيانيا حيث $f : x \longmapsto 0,25x$ بيانيا:

- احجز أسفل الصفحة جيوجيبرا في شريط الحجز Saisie: : $0,25x$
- اضغط على Enter .

ب) كيف يتحرك المستقيم الذي يمثّل دالة خطية معاملها a ، عندما يتغير a؟

- اضغط على $a=2$ ثم على $a=2$ Curseur

ثم على الصفحة جيوجيبرا لإظهار النافذة



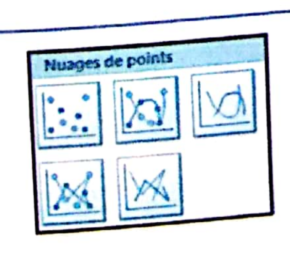
ثم اختر OK ويظهر زالق (curseur) على الصفحة جيوجيبرا.

- احجز أسفل الصفحة جيوجيبرا في شريط الحجز Saisie: : ax واضغط على Enter .
- حرّك الزالق بالفأرة، ماذا تلاحظ عندما $a > 0$؟ عندما $a < 0$؟ عندما $a = 0$؟

دوري الآن

استعمل المجدول إكسال لتمثيل جدول القيم السابق بيانيا

باستخدام خاصة الأيقونة Nuage de points ثم اختيار أحد الأيقونات التالية:



7 الــدّالــة التّآلفيّــة

سأتعلّم في هذا الباب

- معرفة الترميز $x \longmapsto ax+b$.
- تعيين صورة عدد بدالة تآلفية.
- تعيين عدد صورته بدالة تآلفية معلومة.
- تعيين دالة تآلفية انطلاقا من عددين وصورتيهما.
- تمثيل دالة تآلفية بيانيا.
- قراءة التمثيل البياني لدالة تآلفية.
- تعيين المعاملين a و b انطلاقا من التمثيل البياني لدالة تآلفية.
- إنجاز تمثيل بياني لوضعية يتدخل فيها مقداران أحدهما معطى بدلالة الآخر، قراءته و تفسيره.
- تفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بيانيا.

قياس درجة الحرارة



تُستخدم في قياس الحرارة بعض الأنواع من الوحدات من أشهرها الدّرجة فهرنهايت (°F) التي تستعمل في البلدان الأنجلوساكسونية والدّرجة سلسيوس (أو الدرجة المئوية) (°C) المعتمدة في أغلبية البلدان.

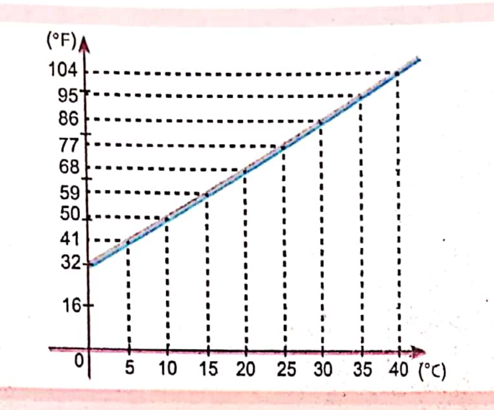
تعود تسمية « الدّرجة فهرنهايت» إلى العالم الألماني دانيال غابريل فهرنهايت وتسمية «الدّرجة سلسيوس» إلى العالم السويدي اندروس سلسيوس.

تحدٍّ

يُمثّل البيان المقابل العلاقة بين الدرجة سلسيوس والدرجة فهرنهايت حيث يُرمز بـ x لدرجة الحرارة بـ (°C) و $f(x)$ لدرجة الحرارة بـ (°F).

1) إذا كانت درجة الحرارة 10°c فما هي الدرجة المقابلة لها بالفهرنهايت؟

2) عبّر عن $f(x)$ بدلالة x.



أستعدّ **أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.**

1) إذا كان $x = 6$ فإن $\frac{1}{2}x = 12$.

2) صورة العدد 0 بالدّالة الخطية $x \longmapsto -\sqrt{2}x$ هي 0.

3) صورة العدد $\sqrt{2}$ بالدّالة الخطية $x \longmapsto -\sqrt{2}x$ هي -1.

4) الدّالة $x \longmapsto \frac{1}{3}x+1+x+2$ هي دالة خطية.

5) العدد الذي صورته 1 بالدّالة الخطية $x \mapsto 4x$ هو $\frac{1}{4}$.

6) التمثيل البياني للدّالة $x \mapsto \frac{1}{2}x$ هو مستقيم يشمل مبدأ المعلم و النقطة A(2 ; 1).

7) لاحظ التمثيل أدناه.

أ) الدّالة الخطية التي تمثيلها البياني هو (d) هي الدّالة f حيث $f(x) = -x$.

ب) الدّالة الخطية التي تمثيلها البياني هو (d') هي الدّالة g حيث $g(x) = -x$.

1 تعيين دالة تآلفية

توظف مؤسسة اقتصادية عمالا و تقترح على كل واحد منهم أجرة يتم حسابها بالصيغة التالية:
أجرة قاعدية شهرية قدرها 35000DA، يضاف إليها 185DA لكل ساعة إضافية منجزة في نفس الشهر.

1) إذا أنجز عامل 10 ساعات إضافية، تحقق من أنّ أجرته لهذا الشهر تساوي 36 850DA.

2) أ) انقل الجدول التالي وأتممه :

عدد الساعات الإضافية	5	8	10	12	15
الأجرة الشهرية (بالدينار)	...	...	36 850	...	...

ب) هل الجدول المقابل جدول تناسبية؟ اشرح.

3) نسمّي x عدد الساعات الإضافية التي أنجزها عامل، عبّر عن أجرته $S(x)$ بدلالة x.

4) كل دالة من الشكل : $x \longmapsto ax+b$ حيث a و b عددان معلومان تسمى دالة تآلفية .

أ) هل الوضعية المقترحة تعرّف دالة تآلفية؟

ب) صف الدالة S ببرنامج حساب من الشكل : «اضرب x ...، أضيف ...»

2 التعرّف على دوال تآلفية

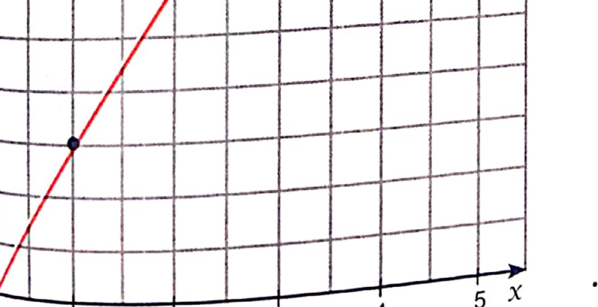
1) نقترح الدوال الآتية: أ) $x \longmapsto 3x^2+1$ ؛ ب) $x \longmapsto -2x+1$ ؛ جـ) $x \longmapsto 5x$ ؛ د) $x \longmapsto \frac{x}{2}-1$

هـ) $x \longmapsto 2+3x$ ؛ و) $x \longmapsto \frac{1}{x}-3$.

ما هي الدوال التي تعتبر دوال تآلفية؟ عيّن عندئذ المعاملين a و b لكلّ دالة تآلفية.

2) ما رأيك في التصريح : «الدالة الخطيّة هي أيضا دالة تآلفية»؟

3 تمثيل دالة تآلفية



الشكل المقابل هو تمثيل الدّالة الخطية g حيث $g(x)=\frac{3}{2}x$.

أعد إنشاء المستقيم (d) في معلم متعامد ومتجانس مبدؤه O حيث الوحدة هي 1cm.

1) f هي الدّالة التآلفية حيث $f(x)=\frac{3}{2}x+1$ و (d') تمثيلها البياني.

أ) ما هو ترتيب النقطة من (d) التي فاصلتها 2؟
استنتج دون حساب ترتيب النقطة من (d') التي فاصلتها 2.

ب) بشكل عام، كيف نجد ترتيب نقطة من (d') انطلاقا من نقطة من (d) التي لها نفس الفاصلة؟

2) أ) برهن أنّ النقطة التي إحداثياها $(0 ; 1)$ تنتمي إلى المستقيم (d').

ب) بشكل عام، برهن أنّ النقطة التي إحداثياها $(0 ; b)$ تنتمي إلى المستقيم الممثل للدالة f حيث $f(x)=ax+b$.

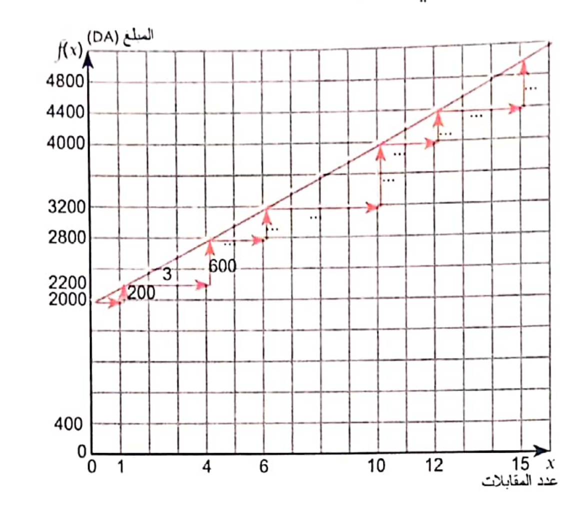
(نسمّي العدد b في عبارة الدالة f حيث $f(x)=ax+b$ الترتيب عند المبدأ).

4 تناسب التّغيّرات

1) لمتابعة مباريات كرة القدم، يعرض مركّب رياضي على مناصري فريق المدينة الصيغة التالية :

اشتراك سنوي لموسم رياضي حيث يدفع كل مناصر مبلغ 2000DA يضاف إليه مبلغ 200DA يدفعه عند كل دخول للملعب لمشاهدة مقابلة فريقه المفضّل.

- إذا تابع مناصر 7 مقابلات خلال موسم رياضي، فما هو المبلغ الإجمالي الذي يدفعه؟
- إذا دفع مناصر مبلغا إجماليا قدره 4800DA، فما هو عدد المقابلات التي تابعها؟



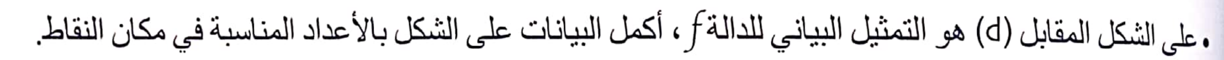
2) f هي الدّالة التآلفية التي ترفق بكل عدد المقابلات x المبلغ $f(x)$ الذي يدفعه مناصر.

- بيّن أن $f(x) = 200x + 2000$.
- ما هي صورة الأعداد 1 ، 4 ، 6 ، 9 ؟
- احسب $f(11)$ و $f(15)$.

ما هو العدد الذي صورته 2000؟

- احسب $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$ ؛ $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$ ؛ $\frac{f(6)-f(4)}{6-4}$.

ماذا تلاحظ؟



- على الشكل المقابل (d) هو التمثيل البياني للدالة f ، أكمل البيانات على الشكل بالأعداد المناسبة في مكان النقاط.

5 التفسير البياني لحل جملة معادلتين

1) لتزيين قسمهم جمع التلاميذ مبلغ 5000DA من قطع 100DA و 200DA.

عدد كلّ القطع النقدية هو 43.

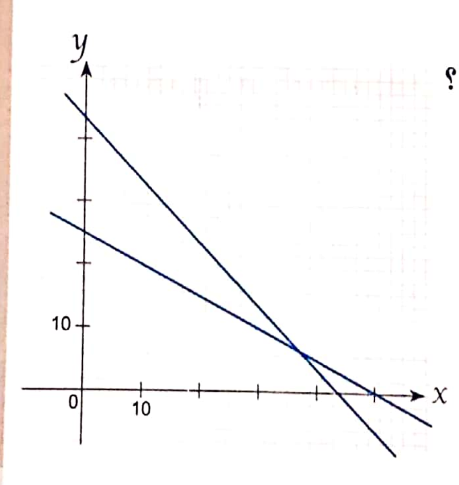
ما هو عدد قطع كلّ فئة؟

2) نعتبر الجملة : $\begin{cases} y = 43 - x & (1) \\ y = 25 - \frac{1}{2}x & (2) \end{cases}$.

أ) ما هي طبيعة كلّ من الدالتين $f: x \longmapsto 43 - x$ و $g: x \longmapsto 25 - \frac{1}{2}x$ ؟

ب) الشكل المقابل هو للتمثيلين البيانيين لهاتين الدالتين.

أرفق كلّ مستقيم بالدالة الموافقة له.



جـ) أعد الرّسم باستعمال ورق مليمتري.

هل توجد نقاط إحداثياتها تحقّق معادلتي المستقيمين في آن واحد؟

د) كيف تفسّر النتيجة في سياق الوضعية أعلاه؟

1 الدّالة التآلفية

تعريف

a و b عددان.

عندما نرفق بكل عدد x العدد $ax + b$.

نقول إنّنا عرّفنا دالة تآلفية.

يسمى العدد $ax + b$ صورة x بهذه الدّالة.

a و b هما معاملا هذه الدّالة.

مثال

الدّالة f حيث $f(x) = -3x + 5$ هي دالة تآلفية معاملاها -3 و 5.

صورة العدد 0 بالدّالة f هي $f(0)$ أي 5.

صورة 1- بالدّالة f هي $f(-1)$ أي 8.

الترميز

يُرمز لدالة تآلفية بإحدى الرموز f ، g ، h...

إذا كان $ax + b$ هو صورة x بالدّالة التآلفية f، نكتب $f : x \longmapsto ax + b$ ، نكتب أيضا $f(x) = ax + b$

حالات خاصة

إذا كان $b = 0$ تصبح الدالة f من الشكل $f : x \longmapsto ax$ هي دالة خطية.

إذا كان $a = 0$ تصبح الدالة f من الشكل $f : x \longmapsto b$ هي دالة ثابتة.

2 التمثيل البياني لدالة تآلفية

خاصية

في معلم للمستوي، التمثيل البياني لدالة تآلفية هو $f : x \longmapsto ax + b$ هو مستقيم.

ملاحظات

- لدينا $f(0) = b$ ، العدد b يسمى الترتيب عند المبدإ للمستقيم (d) الممثل للدّالة التآلفية $f : x \longmapsto ax + b$.
- النقطة $M(x_0 ; y_0)$ تنتمي إلى المستقيم (d) معناه $y_0 = ax_0 + b$.
- العلاقة $y = ax + b$ تسمى معادلة للمستقيم (d) والعدد a هو معامل توجيهه.

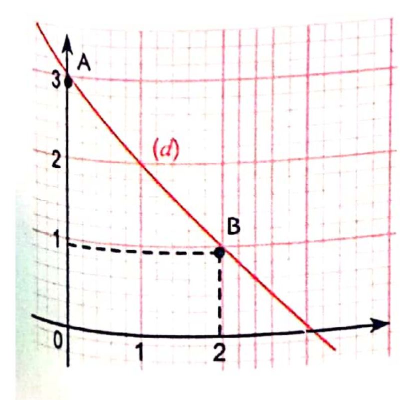
مثال

f هي الدّالة التآلفية حيث $f(x) = -x + 3$ و (d) تمثيلها البياني في معلم.

لإنشاء (d) يكفي تعيين النقطتين A و B.

المستقيم (d) هو المستقيم (AB).

x	0	2
$f(x)$	3	1
النقطة	A(0 ; 3)	B(2 ; 1)



• تعيين صورة عدد وتعيين عدد صورته معلومة

تمرين

f هي الدّالة التآلفية حيث $f(x) = 2x - 5$.

عيّن صورة العدد 2- بالدالة f ثم العدد x الذي صورته بالدالة f هي 1-.

حل

• صورة العدد 2- هي $f(-2)$
حيث $f(-2) = 2(-2) - 5$ إذن $f(-2) = -9$.

• تعيين x حيث $f(x) = -1$.
$f(x) = -1$ يعني $2x - 5 = -1$. أي $2x = 4$
إذن $x = 2$.

طريقة

• لحساب صورة العدد x_0 بالدالة f ، نعوض x بالعدد x_0 في عبارة $f(x)$. ونجري العمليات.

• لتعيين العدد x الذي صورته k بالدالة f نحل المعادلة $f(x) = k$ ذات المجهول x.

• إنشاء التمثيل البياني لدالة تآلفية

تمرين

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. (الوحدة: 1cm)

1) أنشئ التمثيل البياني (d) للدالة التآلفية f حيث $f(x) = -3x + 2$.

2) أنشئ في نفس المَعلم التمثيل البياني (d') للدالة التآلفية g حيث $g(x) = 5x - 4$.

حل

1) نعلم أن التمثيل البياني (d) للدالة التآلفية f هو مستقيم معادلته $y = -3x + 2$.

إذن لإنشاء (d) يكفي تعيين نقطتين منه.

x	0	1
y	2	-1
النقطة	A(0 ; 2)	B(1 ; -1)

إذن (d) هو المستقيم (AB).

2) لدينا $g(1) = 1$ و $g(0) = -4$. إذن النقطتان A'(1 ;1) و B'(0 ;-4) تنتميان إلى (d').

إذن (d') هو المستقيم (A'B').

طريقة

لإنشاء المستقيم الممثل لدالة تآلفية في معلم، يكفي تعيين نقطتين من هذا المستقيم ويمكن الاستعانة بجدول قيم (انظر الحل).

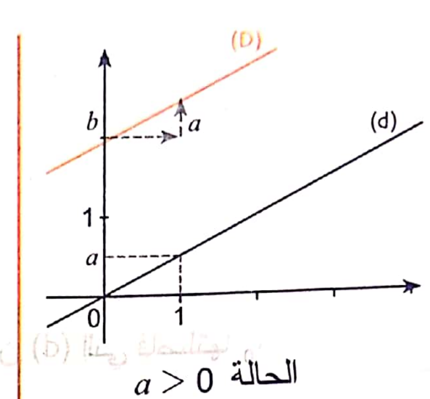
دوري الآن

❶ h هي دالة تآلفية حيث $h(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$.
عيّن صورة العدد 1- بالدالة h و العدد الذي صورته 6 بالدالة h.

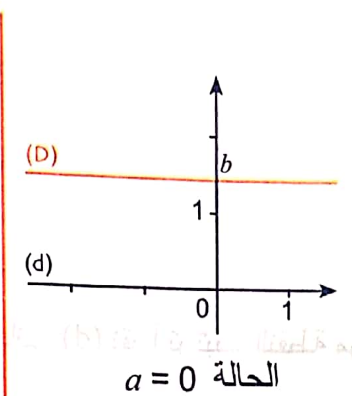
❷ أنشئ في معلم متعامد و متجانس، المستقيم (d) الممثل للدالة g حيث $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

3 الأوضاع النسبية للتمثيلين البيانيين لدالة تآلفية و الدالة الخطية المرفقة

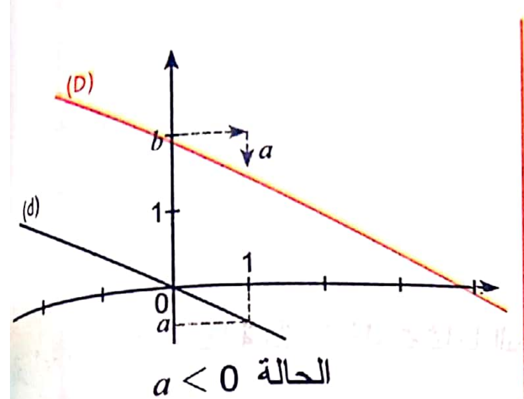
المستقيم (D) الذي يمثل الدّالة التآلفية $x \longmapsto ax+b$ هو صورة المستقيم (d) الذي يمثل الدّالة الخطية $x \longmapsto ax$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(0;b)$. (d) و (D) متوازيان.



الحالة $a > 0$



الحالة $a = 0$



الحالة $a < 0$

4 تناسبية التزايدات

خاصية

f دالة تآلفية حيث $f(x) = ax + b$

مع a و b عددان معلومان.

من أجل كل عددين x_1 و x_2 حيث $x_1 \neq x_2$

لدينا $a = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$

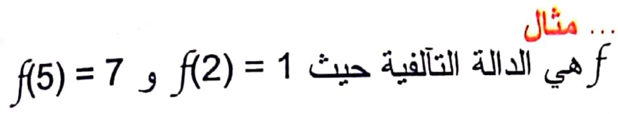
ملاحظة

هذه الخاصية تعني أنّ تزايد $f(x)$ و تزايد x متناسبان ومعامل التناسبية هو a.

a هو أيضا معامل توجيه المستقيم الذي يمثّل الدالة f.

يسمح معامل توجيه مستقيم بمعرفة منحى هذا المستقيم.

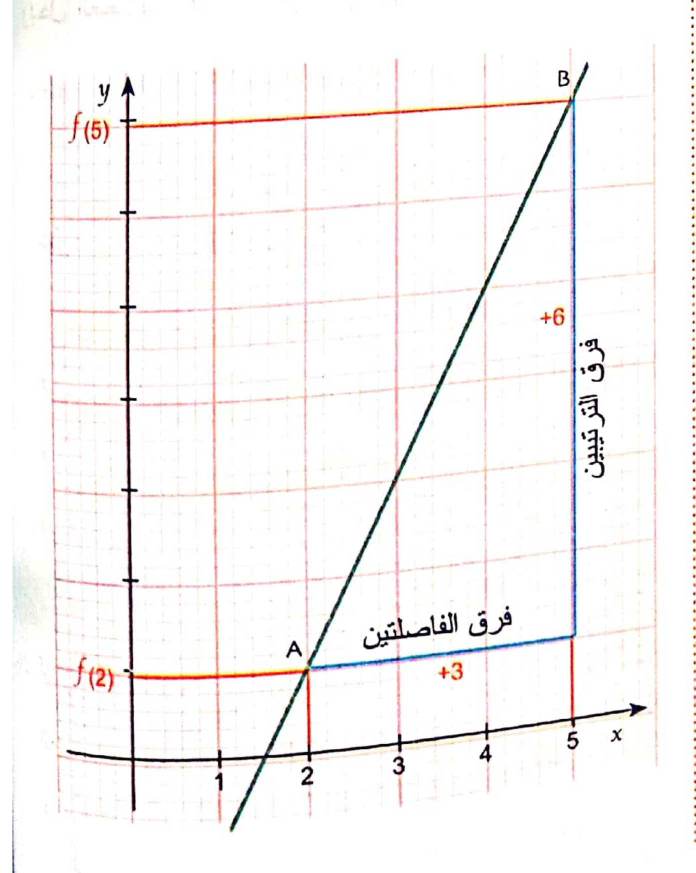
مثال



f هي الدالة التآلفية حيث $f(2) = 1$ و $f(5) = 7$

f من الشكل: $f(x) = ax + b$

لدينا: $a = \dfrac{f(5)-f(2)}{5-2} = \dfrac{7-1}{5-2} = \dfrac{6}{3} = 2$

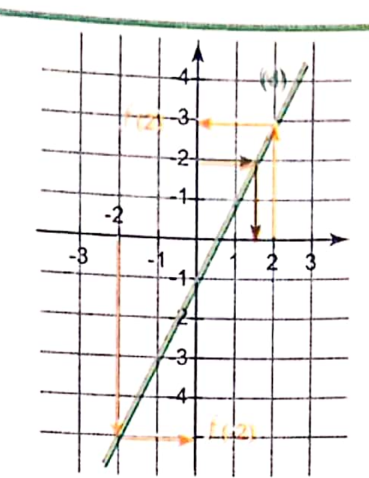


• قراءة التمثيل البياني لدالة تآلفية

تمرين: (d) هو التمثيل البياني لدالة تآلفية f (الشكل المقابل).

بقراءة بيانية، عيّن: أ) صورة كلّ من 2 و -2.

ب) x بحيث $f(x) = 2$



حل: أ) صورة 2 هي 3 و صورة -2 هي -5.

ب) $x = 1,5$.

طريقة

لقراءة صورة x_0 بدالة تآلفية عُلم تمثيلها البياني (d) نقرأ ترتيب النقطة من (d) التي فاصلتها x_0.

• تعيين دالة تآلفية انطلاقا من عددين وصورتيهما

تمرين: f دالة تآلفية حيث $f(-4) = 2$ و $f(1) = 0$. عيّن $f(x)$ صورة x بالدالة f.

حل: تعيين $f(x)$ يعني إيجاد العددين a و b حيث $f(x) = ax + b$ علما أن $f(-4) = 2$ و $f(1) = 0$.

لدينا $\frac{2}{5}- = \frac{0-2}{5} = \frac{f(1)-f(-4)}{1-(-4)} = a$. إذن $f(x) = \frac{-2}{5}x + b$. من جهة أخرى $f(1) = 0$ أي

$-\frac{2}{5} \times 1 + b = 0$ أي $b = \frac{2}{5}$. الدالة التآلفية المطلوبة هي الدّالة f حيث $f(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$.

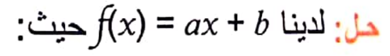
طريقة

لتعيين دالة تآلفية معاملاها a و b علما أن $f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$، نحسب a باستعمال تناسبية التزايدات وبحلّ المعادلة $f(x_1) = y_1$ أو $f(x_2) = y_2$ نجد المجهول b.

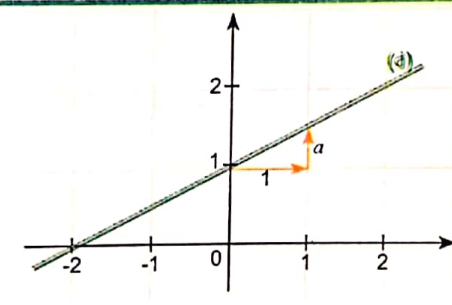
• تعيين دالة تآلفية انطلاقا من تمثيلها البياني

تمرين: (d) هو التمثيل البياني للدالة التآلفية f (الشكل المقابل).

عيّن $f(x)$ صورة x بالدالة f.



حل: لدينا $f(x) = ax + b$ حيث:



• العدد b هو الترتيب إلى المبدأ، (أو $f(0) = b$) ومنه $b = 1$.

• العدد a هو معامل توجيه المستقيم (d)، ومنه $a = \frac{1}{2}$ و $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

(يمكن قراءة العدد بيانيا كما هو موضح في الشكل، أو حسابه باستعمال نسبة التزايدات)

جرّب الآن

1. أنشئ في معلم متعامد و متجانس، المستقيم (d) الممثل للدالة g حيث $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

2. إليك في الشكل المقابل التمثيل البياني (d) لدالة تآلفية f. عيّن صورة 2 بالدالة f ثم العدد الذي صورته 2 بالدالة f.

5 تفسير حل جملة معادلتين من الدَرجة الأولى بمجهولين بيانيا

نعني بتفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بيانيا أن نرفق بهذه الجملة مستقيمين يمثلان الدالتين التآلفيتين المرفقتين بالجملة.

الثنائية المشكلة من إحداثيتي نقطة تقاطع هذين المستقيمين، عند وجودها، هي حلّ هذه الجملة.

مثال

نعتبر الجملة : $\begin{cases} x - 2y = -6 \\ x + y = 0 \end{cases}$

لتفسير حل هذه الجملة بيانيا، نعبّر عن y بدلالة x في كلتا المعادلتين

ونجد: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ y = -x \end{cases}$

نسمّي (d) و (d′) المستقيمين الممثلين للدالتين التآلفيتين:

$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ و $g(x) = -x$. (الشكل المقابل)

حل الجملة هو الثنائية المشكّلة من إحداثيتي نقطة تقاطع (d) و (d′).

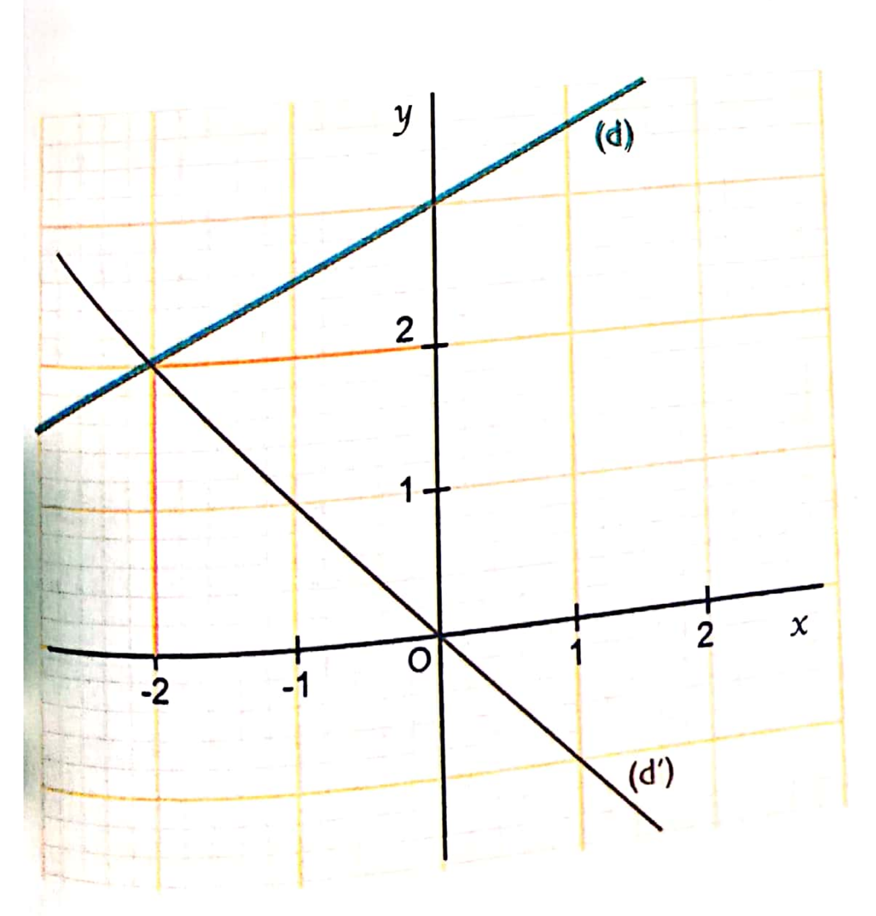
بقراءة بيانية، نجد : (2 ; 2-).

نتحقق حسابيا بالتعويض في المعادلتين:

من أجل $x = -2$ و $y = 2$، لدينا:

$(-2) - 2(2) = -6$ و $(-2) + 2 = 0$.

ومنه: حلّ الجملة المعتبرة هو (2 ; 2-).



• تفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بيانيا

تمرين: حل جبريا الجملة $\begin{cases} x-2y=-8 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$ و فسّر بيانيا حلها.

حل: أ) نحلّ جبريا الجملة المعطاة بطريقة الجمع والتعويض.

بجمع المعادلتين طرفي بطرف نجد $x-2y+3x+2y=-8$ أي $4x=-8$. بالتالي $x=-2$.

نعوض x بـ -2 في المعادلة $x-2y=-8$ ونجد $-2-2y=-8$. بالتالي $-2y=-6$ أي $y=3$.

ينتج أن $x=-2$ و $y=3$.

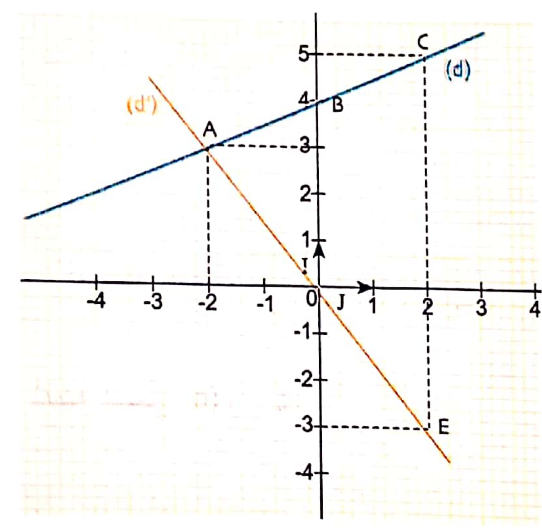
من أجل $x=-2$ و $y=3$، لدينا $-2-2(3)=-8$ و $3(-2)+2\times3=0$.

إذن حل الجملة المعطاة هو الثنائية $(-2;3)$.

ب) التفسير البياني لهذا الحل.

$\begin{cases} x-2y=-8 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+4 \\ y=-\frac{3}{2}x \end{cases}$ نعتبر الدالتين التآلفيتين f و g المعرّفتين كالتالي:

$f: x \mapsto \frac{1}{2}x+4$ و $g: x \mapsto -\frac{3}{2}x$



نسمي (d) التمثيل البياني للدالة f و (d') التمثيل البياني للدالة g

في معلم متعامد و متجانس مبدؤه O.

لإنشاء (d) و (d') نستعين بالجدولين الآتيين:

x	0	2
y	4	5

x	0	2
y	0	-3

يتقاطع هذان المستقيمان في النقطة A ذات الإحداثيات $(-2;3)$

إنها تمثل أيضا حل الجملة المعطاة.

طريقة

لحل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بيانيا، نترجم كل معادلة بدالة بالتعبير عن y بدلالة x، ونرسم المستقيمين الممثلين لهما في نفس المعلم. إحداثيا نقطة تقاطع المستقيمين هما حل الجملة . يمكن التحقق من ذلك حسابيا.

تدرب الآن

❶ حل جبريا الجملة $\begin{cases} x-3y=5 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

فسّر بيانيا هذا الحل.

❷ توجد في حظيرة، سيارات ودراجات نارية متوقفة، عددها الإجمالي 78.

ماهو عدد السيارات وعدد الدراجات إذا علمت أن عدد العجلات هو 218؟

التعرف على دالة تآلفية

1 من بين الدوال الآتية ، حدّد الدوال التآلفية.

$h: x \longmapsto -\sqrt{2}x+1$ ، $g: x \longmapsto \frac{1}{2}x$ ، $f: x \longmapsto \frac{1}{x}-3$

$t: x \longmapsto \frac{2x+1}{x-1}$ ، $p: x \longmapsto x(x-1)$ ، $k: x \longmapsto \frac{1}{8}$.

2 عيّن معاملي كل دالة من الدّوال التآلفية الآتية:

$f(x)= x+2$ ؛ $g(x)= -x-2$.

$h(x)= 3-5x$ ؛ $k(x)= \frac{1}{2}(x-1)$.

$p(x)= 2x-3+2(x-1)$ ؛ $m(x)= 5$.

حساب صورة أو تعيين عدد صورته معلومة

3 نعتبر الدالة التآلفية $x \longmapsto 4x-3$.

أكمل الجدول التالي:

x	-3	-2,5	0	1	3	4,5
$f(x)$						

4 نعتبر الدالة التآلفية $x \longmapsto -2x+3$.

أكمل الجدول التالي:

x	-3	-1	0		3	
$f(x)$				-1		-7

5 f هي الدالة التآلفية حيث $f(x)=1-3x$.

1) عيّن معاملي الدالة f.

2) احسب صورة كل عدد مما يلي: 0، $\frac{1}{3}$، 1.

3) عيّن العدد الذي صورته هي 0 بالدالة f

6 g هي الدالة التآلفية حيث $g(x)=1-3x$.

أ) احسب: $g(0)$ ؛ $g(-1)$ ؛ $g\left(\frac{1}{3}\right)$ ؛ $g(0,5)$

ب) عيّن العدد الذي صورته بالدالة g:

1) 0 2) -5 3) $-\frac{2}{3}$

التمثيل البياني لدالة تآلفية

7 نعتبر الدالة h المعرفة بالشكل: $h(x)=3x-5$

أ) ما هي طبيعة التمثيل البياني لهذه الدالة؟

ب) ما هو عدد النقاط الضرورية لإنشاء التمثيل البياني لهذه الدالة؟

جـ) عيّن إحداثيات ثلاث نقط فواصلها محصورة بين العددين -3 و 3.

د) أنشئ التمثيل البياني بأخذ 1cm كوحدة على المحورين.

8 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مبدؤه O.

أنشئ المستقيم (d) الممثل للدالة التآلفية f حيث $f(x)=-\frac{3}{5}x+3$.

9 أوجد، من بين الدوال التآلفية الآتية، الدالة التي تمثيلها البياني كما في الشكل.

أ) $f(x)=\frac{1}{2}x+2$

ب) $f(x)=-\frac{1}{2}x+3$

جـ) $f(x)=-\frac{1}{2}x+1$

10 g و h دالتان تآلفيتان حيث :

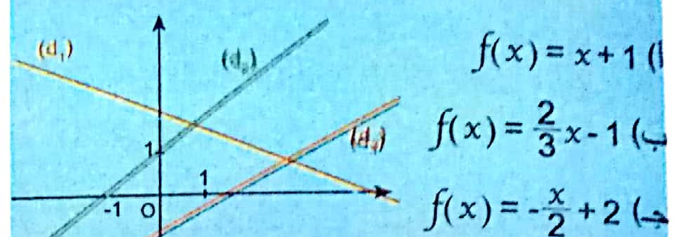
$g(x)=x-4$ و $h(x)=-2x+1$.

1) أنشئ في نفس المعلم المتعامد و المتجانس التمثيلين البيانيين (d) و (d') للدالتين g و h على الترتيب.

2) اشرح كيف يمكن إيجاد إحداثيي نقطة E تقاطع المستقيمين (d) و (d').

احسب إحداثيي النقطة E.

11 أرفق كل تمثيل بياني بالدالة التآلفية المناسبة.



أ) $f(x) = x + 1$

ب) $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$

جـ) $f(x) = -\frac{x}{2} + 2$

تعيين دالة تآلفية

12 عيّن الدالة التآلفية f بحيث $f(0) = 5$ و $f(1) = 2$.

13 g دالة تآلفية حيث $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ و $g(2) = 0$.

عبّر عن $g(x)$ بدلالة x.

14 الشكل المقابل

هو التمثيل البياني

(d) للدالة التآلفية h.

عبّر عن $h(x)$ بدلالة x.

15 f هي الدالة التآلفية حيث $f(0) = 3$ و $f(3) = 5$

عبّر عن $f(x)$ بدلالة x.

16 f هي الدالة التآلفية حيث تمثيلها البياني هو مستقيم

(d) معامل توجيهه 3.

عبّر عن $f(x)$ بدلالة x إذا علمت أن $f(2) = 5$.

17 التمثيل البياني (d) لدالة تآلفية h يمر بالنقطتين

$A(2 ; -3)$ و $B(-1 ; 8)$.

1) عيّن معامل توجيه المستقيم (d).

2) عبّر عن $f(x)$ بدلالة x.

تناسب التزايدات

18 إليك جدول قيم الدالة h الآتي:

x	0	8	4
$h(x)$	3	1	2

1) احسب $\frac{h(8)-h(0)}{8}$ ، $\frac{h(4)-h(8)}{4-8}$ ، $\frac{h(4)-h(0)}{4}$. واستنتج طبيعة الدالة h.

2) عيّن معامل توجيه المستقيم الممثل لهذه الدالة.

19 f دالة تآلفية حيث $f(2) = -3$ و $f(3) = 7$.

احسب $f(0)$ ؛ $f(-2)$ ؛ $f(4)$.

ما هو العدد الذي صورته 9؟

20 f دالة تآلفية من الشكل $f(x) = ax + b$.

نعتبر عددين x_1 و x_2 بحيث $x_1 \neq x_2$.

1) برهن أنّ $f(x_1) - f(x_2) = ax_1 - ax_2$.

2) حلل الطرف الثاني من المساواة السابقة.

3) استنتج أن $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

د) ما هي الخاصية التي برهنّا عليها؟

21 f دالة تآلفية من الشكل $f(x) = ax + b$ وحيث $f(2) = 7$ و $f(5) = 13$.

1) احسب $f(5) - f(2)$.

2) عبّر عن $f(5) - f(2)$ بدلالة a.

3) استنتج قيمة a، ثم قيمة b.

الحل البياني لجملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

22 حلّ جبريا كلاّ من الجملتين ثمّ تحقق بيانيا.

أ) $\begin{cases} x - 7y = 4 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

أؤكد تعلماتي

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة	الإجابات (1)	(2)	(3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	الدالة $x \mapsto (3x+1)-2(x-3)$ هي	دالة خطية	دالة تآلفية	ليست دالة تآلفية	80
2	معاملا الدالة التآلفية f حيث $f(x)=4x-4$ هما:	$a=4$ و $b=-4$	$a=-4$ و $b=4$	لا يمكن تعيينهما	80
3	f دالة تآلفية حيث $f(x)=\sqrt{2}x-1$ صورة $\sqrt{2}$ بالدالة f هي:	1	$\sqrt{2}-1$	0	80 و 81
4	g دالة تآلفية حيث $g(x)=\frac{1}{3}x-3$ العدد الذي صورته 2- بالدالة g هو	$-\frac{2}{3}-3$	3	-3	80 و 81 و 83
5	(d) هو التمثيل البياني لدالة تآلفية. من هذا الشكل ينتج :	صورة 1- هي 3 العدد الذي صورته 1 هو 1	صورة 1- هي 1- العدد الذي صورته 0 هو 3	لا يمكن حساب صورة 1- لا يمكن حساب العدد الذي صورته 1-	81 و 83
6	f دالة تآلفية حيث $f(x)=ax+b$ علما أن $f(-1)=4$ و $f(4)=-1$ إذن:	$a=-1$	$a=1$	لا يمكن حساب a	83
7	g دالة تآلفية حيث $g(2)=3$ و $g(-3)=-2$ إذن :	$g(x)=x+1$	$g(x)=x-1$	$g(x)=-x+1$	83

أدمج تعلماتي

وضعية

انطلقت دراجة نارية من القرية في اتجاه المدينة على الساعة 8h بسرعة ثابتة قدرها 30km/h.
وانطلقت سيارة من نفس القرية في اتجاه نفس المدينة على الساعة 10h بسرعة ثابتة قدرها 50km/h.
المسافة بين القرية والمدينة هي 200km. بعد مدّة t قطعت السيارة المسافة f(t) وقطعت الدراجة النارية المسافة g(t).

1) عبّر عن كل من f(t) و g(t) بدلالة t.
2) متى تلتحق السيارة بالدراجة النارية؟ حدّد عندئذ المسافة المقطوعة.

تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: عمّ يتحدث النص؟ نظّم المعطيات ثم حدّد التعليمات.
تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل مناسبة: ما هي المعطيات المفيدة في النصّ؟ ما هي العلاقة الموجودة بينها؟ ماذا نحسب في بداية الأمر؟
تنفيذ استراتيجية الحل المختارة: ننمذج الوضعية بدالة خطية f و دالة تآلفية g.
نوظّف التمثيلين البيانيين للدالتين f و g.
نعبّر عن $f(t)$ و $g(t)$ بدلالة t باستعمال الحركة المستقيمة المنتظمة التي درست سابقا و تناسبية تزايدات t و $g(t)$
نستنتج المطلوب من المستقيمين الممثلين للدالتين f و g.

23 يعرض محل للأكل الخفيف صيغتين لبيع فطائر بيزا:

- 400DA الفطيرة الواحدة، للتناول في المكان.
- 350DA الفطيرة الواحدة، يضاف إليها 500DA لمصاريف التسليم مهما كان عدد الفطائر المطلوبة.

1) أكمل الجدول الآتي:

عدد الفطائر المشتراة	2	5	12	15
الثمن عند التناول في المكان (DA)	800			
الثمن عند الطلب عن بُعد (DA)	1200			

2) نرمز بـ x لعدد الفطائر المشتراة.

ليكن P_1 الثمن المدفوع لشراء x فطيرة للتناول في المكان و P_2 الثمن المدفوع لطلب x فطيرة عن بعد.

عبّر عن P_1 و P_2 بدلالة x.

3) في معلم متعامد مناسب، ارسم المستقيمين (d_1) و (d_2) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب، بحيث:

$f(x) = 400x$

$f(x) = 350x + 500$

4) باستعمال البيان السابق:

أ) عيّن الصيغة الأفضل لشراء 6 فطائر.

ب) انطلاقا من أيّ عدد من الفطائر، يكون الشراء عن بُعد أصغر من أو يساوي الشراء و التناول في المكان؟

24 يقرأ أحمد كتابا من البداية إلى النهاية بوتيرة ثابتة مقدرة بـ 20 صفحة في الساعة.

بعد أربع ساعات بقيت له 140 صفحة للقراءة.

نسمي $f(x)$ عدد الصفحات المتبقية للقراءة بعد x ساعة.

1) ما هو عدد صفحات هذا الكتاب؟

2) عبّر عن $f(x)$ بدلالة x.

3) مثل بيانيا الدّالة f في معلم متعامد.

25 يريد صاحب مطعم ملء خزان ماء مستعملا قارورات سعة كل منها 1,5L مُسجّلا المدة الزمنية المستغرقة في الجدول الآتي:

المدة (بالثواني)	12	24	48
عدد القارورات	1	2	4

1) هل الجدول يمثّل وضعيّة تناسبية؟ علّل إجابتك

2) ماهي كميّة الماء المُعبّأة في القارورات خلال دقيقة واحدة؟

3) نرمز بالرمز $V(t)$ إلى عدد اللترات المعبّأة خلال مدّة زمنيّة t (بالثواني) عبّر عن $V(t)$ بدلالة t.

4) إذا علمت أنّ سعة الخزّان 100L، فهل تكفي ساعة من الزمن لملئه؟

26 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

برهن أن النقط $A(11 ; -17)$ ، $B(0 ; 5)$ و $C(-8 ; 21)$ على استقامة واحدة.

27 المسافة بين قريتين A و B هي 10km.

انطلق راجل من A في اتجاه B على الساعة 16h بسرعة ثابتة قدرها 6km/h علما أنه يستريح كل ثلاثة كيلومترات لمدة 10 دقائق.

و انطلق دراج من B نحو A على الساعة 16h45min بسرعة ثابتة قدرها 20km/h.

عيّن باستعمال طريقة بيانية وقت الالتقاء و المسافة بين نقطة الالتقاء والقرية A.

مسافة التوقف و الأمان

مشاهدة التمثيل البياني لدالة تآلفية عندما نغيّر معامليها باستعمال البرمجية جيوجبرا

1) أظهر الشبكة و المحورين

انقر على الصفحة جيوجبرا ثم اختر Axes و Grille.

2) أظهر زالقين a و b كما يلي :

• انقر على [أيقونة الزالق] ثم على الصفحة جيوجبرا

• و اختر ما يلي:

Curseur
Nombre — Nom: a
Angle
Entier — Aléatoire
Intervalle | Curseur | Animation
min: -5 — max: 5 — Incrément: 0.1
OK — Annuler

انقر على OK فيظهر الزالق a.

• انقر مرة أخرى على الصفحة جيوجبرا بالكيفية نفسها يظهر الزالق b.

3) • احجز في شريط الحجز أسفل صفحة جيوجبرا العبارة : Saisie: f(x)=a*x+b ثم Enter.

ماذا تلاحظ؟

• أظهِر المستقيم (D) الذي يمثّل الدّالة f حيث $f(x) = 2x - 3$ بتحريك الزالقين a و b .

• عيّن بقراءة بيانية نقطة تقاطع (D) مع محور التراتيب.

• عيّن بقراءة بيانية نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل.

• حرك الزالق b. ماذا تلاحظ؟

• حرك الزالق a. ماذا تلاحظ؟

• عيّن العبارة الجبرية للدّالة التآلفية التي تمثيلها البياني المستقيم الذي يشمل النقطة $A(-1 ; 2)$ و معامل توجيهه 3.

دوري الآن

باستعمال البرمجية جيوجبرا عيّن بقراءة بيانية، إحداثيي نقطة تقاطع المستقيم الممثل للدّالة $f : x \longmapsto 3x - 2$ و المستقيم الذي يقطع محور التراتيب في النقطة $A(2 ; -1)$ و معامل توجيهه 2.

8 الإحصاء

سأتعلم في هذا الباب

- حساب تكرارات مجمعة وتواترات مجمعة.
- تعيين الوسيط والمتوسط والمدى لسلسلة إحصائية وترجمتها.
- استعمال المجدولات لمعالجة معطيات إحصائية وتمثيلها.

تلوث البيئة: من بين أسوأ عشرة أسباب لتلوث الهواء انبعاث غازات السيارات التي هي المصدر رقم واحد لأول أكسيد الكربون والرصاص وأكاسيد النيتروجين، والمركبات العضوية المتطايرة في الجو. وبالنظر إلى وجود ملايين السيارات في المناطق الحضرية بالمدن الكبرى، يمكن أن يؤدي ذلك إلى خروج كمية هائلة جدا من الانبعاثات الضارة بكوكب الأرض. ما الذي يمكن فعله حيال هذا الأمر؟ لاشكّ أنّ استخدام وسائل النقل العام كلما أمكن، والفحص الدوري للسيارة للحفاظ على مستوى الانبعاثات التي تخرج منها، وتجنب القيادة إذا لم تكن هناك حاجة إليها؛ كلها تدابير تساهم في تخفيف تلوث البيئة.

تحدّ

	ذكور		إناث	
	العدد	المعدل	العدد	المعدل
القسم (أ)	15	10	18	13
القسم (ب)	14	12,5	19	11

يقدّم الجدول نتائج تلاميذ قسمين في امتحان حسب عدد الذكور والإناث والمعدّل. أي القسمين نتائجه أفضل؟



أستعدّ

أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

1) متوسط السلسلة : 3 ، 3- ، 4 ، 2- هو 1.

2) متوسط السلسلة المعطاة في الجدول أدناه هو 4,5.

القيمة	2	5	10	1
التكرار	5	2	1	5

3) المدرج التكراري المقابل يمثل الجدول أدناه:

القيمة a	$5 \leq a < 10$	$10 \leq a < 15$	$15 \leq a \leq 20$
التكرار	4	8	7

4) المخطط الدائري المقابل يمثل الجدول أدناه:

القيمة a	$10 \leq a < 20$	$20 \leq a < 30$	$30 \leq a \leq 40$
التكرار النسبي	0,5	0,125	0,375

1 التكرار المجمع

• تمثل سلسلة القيم الآتية أطوال قامات 20 تلميذا (بالسنتيمتر).

159	160	165	157	154	159	157	154	165	160
159	157	160	157	159	160	154	160	159	165

1) رتب هذه السلسلة ترتيبا تصاعديا.

2) ما هو عدد التلاميذ الذين أطوال قاماتهم 159cm على الأقل؟

3) ما هو عدد التلاميذ الذين أطوال قاماتهم 160cm على الأكثر؟

4) انقل ثم أتمم الجدول الآتي:

القامة t	165	160	159	157	154
التكرار	...	...	...	4	3
عدد التلاميذ الذين قاماتهم أصغر من أو تساوي t	20	...	...	7	3

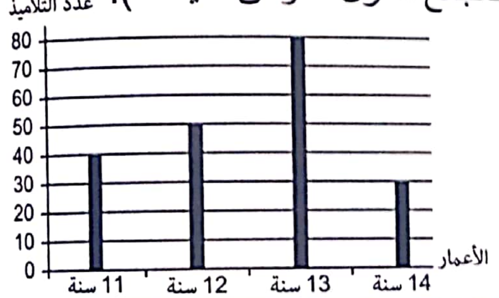
(عدد التلاميذ الذين قاماتهم أصغر من أو تساوي t يسمى التكرار المجمع الصاعد الموافق للقيمة t).

5) انقل ثم أتمم الجدول الآتي:

القامة t	165	160	159	157	154
التكرار	3	5	5	4	3
عدد التلاميذ الذين قاماتهم أكبر من أو تساوي t	3	8	...	...	20

(عدد التلاميذ الذين قاماتهم أكبر من أو تساوي t يسمى التكرار المجمع النازل الموافق للقيمة t).

• يمثل المخطط المقابل توزيع مجموعة تلاميذ إحدى المتوسطات حسب أعمارهم.
عيّن التكرار المجمع الصاعد الموافق للقيمة 12 و التكرار المجمع النازل الموافق للقيمة 13.



2 التكرار النسبي المجمع

الجدول التالي يبيّن توزيع علامات استجواب الرياضيات لقسم يتكون من 30 تلميذا.

العلامة n	20	17	15	13	12	10	9
عدد التلاميذ	1	2	4	5	8	7	3

• التكرار النسبي للتلاميذ الذين علاماتهم أصغر من أو تساوي n يُسمى التكرار النسبي المجمع الصاعد الموافق للقيمة n.

• التكرار النسبي للتلاميذ الذين علاماتهم أكبر من أو تساوي n يُسمى التكرار النسبي المجمع النازل الموافق للقيمة n.

انقل ثم أتمم الجدول التالي:

العلامة n	20	17	15	13	12	10	9
التكرار النسبي للتلاميذ الذين علاماتهم أصغر من أو تساوي n	$\frac{30}{30}$	...	...	...	$\frac{18}{30}$	...	$\frac{3}{30}$
التكرار النسبي للتلاميذ الذين علاماتهم أكبر من أو تساوي n	$\frac{1}{30}$	...	$\frac{7}{30}$	...	...	...	$\frac{30}{30}$

3 المدى والمتوسط لسلسلة إحصائية

1) يبيّن المخطط بالأعمدة المقابل الرَّوَاتِب الشهرية بالدينار في مؤسسة صغيرة.

ما هو الفرق بين أكبر راتِب و أصغر راتِب؟

(يسمى هذا الفرق مدى سلسلة الرواتب)

2) الجدولان التاليان يبيّنان درجات الحرارة (°C) التي سجلت في مدينتين (أ) و (ب) خلال شهر نوفمبر.

	المدينة (أ)			
درجة الحرارة	18	15	16	20
عدد الأيام	2	18	6	4

	المدينة (ب)			
درجة الحرارة	10	18	15	20
عدد الأيام	3	4	16	7

أ) عيّن مدى كل سلسلة من السلسلتين و قارن بينهما.

ب) احسب متوسط كل من السلسلتين.

أي المدينتين كانت أكثر حَرًّا خلال شهر نوفمبر؟

4 وسيط سلسلة إحصائية

• إليك رواتب شهرية بالدينار لـ 11 عاملا بإحدى المؤسسات الخاصة:

42000	35000	55000	42000	60000	50000	35000	42000	50000	65000	35000

1) رتب هذه السلسلة ترتيبا تصاعديا.

2) ما هو الرّاتب الذي يجزئ هذه السلسلة إلى سلسلتين لهما نفس التكرار؟

(يسمى هذا الرّاتب وسيط هذه السلسلة) ويرمز له بالرمز Med.

• إليك درجات الحرارة القصوى التي سجلت في مدينة الوادي خلال الأيام العشرة الأولى من جوان:

40	35	34	41	48	37	35	46	37	40

1) احسب مدى ومتوسط هذه السلسلة.

2) رتب هذه السلسلة ترتيبا تنازليا ثم أعط وسيطها.

• تمثل السلسلة الإحصائية التالية أوزانا بالكيلوغرام لـ 41 تلميذا من إحدى المتوسطات.

الوزن P	$34 \leq P < 38$	$38 \leq P < 42$	$42 \leq P < 46$	$46 \leq P < 50$	$50 \leq P \leq 54$
عدد التلاميذ	4	10	12	9	6

أعط تقديرا للوزن المتوسط لهؤلاء التلاميذ. عيّن الفئة التي تشمل وسيطا لهذه السلسلة.

1 التكرار المجمع

• التكرار المجمع الصاعد

تعريف

التكرار المجمع الصاعد لقيمة في سلسلة إحصائية، هو مجموع تكرار هذه القيمة وتكرارات القيم الأصغر منها.

مثال

إليك علامات 20 تلميذا.

12	12	12	19	10	9	10	10	12	9
10	13	12	12	13	13	13	13	9	12

لتعيين التكرار المجمع لكل علامة، يجب ترتيب العلامات ترتيبا تصاعديا وتنظيمها في الجدول التكراري الآتي:

العلامة	9	10	12	13	19
التكرار	3	4	7	5	1

• التكرار المجمع الصاعد للعلامة 12 هو 14 (14 هو مجموع تكرارات العلامات 12، 10، 9).

• التكرار المجمع النازل للعلامة 10 هو 17 (17 هو مجموع تكرارات العلامات 10، 12، 13، 19).

• التكرار المجمع النازل

تعريف

التكرار المجمع النازل لقيمة في سلسلة إحصائية، هو مجموع تكرار هذه القيمة وتكرارات القيم الأكبر منها.

• يمكن إنجاز جدول التكرارات المجمعة كما يلي:

العلامة	9	10	12	13	19
التكرار	3	4	7	5	1
التكرار المجمع الصاعد	3	7	14	19	20
التكرار المجمع النازل	20	17	13	6	1

2 التكرار النسبي المجمع

• التكرار النسبي المجمع الصاعد

تعريف

التكرار النسبي المجمع الصاعد لقيمة في سلسلة إحصائية، هو مجموع التكرار النسبي لهذه القيمة والتكرارات النسبية للقيم الأصغر منها.

• التكرار النسبي المجمع النازل

تعريف

التكرار النسبي المجمع النازل لقيمة في سلسلة إحصائية، هو مجموع التكرار النسبي لهذه القيمة والتكرارات النسبية للقيم الأكبر منها.

مثال

نأخذ معطيات المثال السابق.

نستنتج جدول التكرارات النسبية المجمعة كما يلي:

العلامة	9	10	12	13	19
التكرار	3	4	7	5	1
التكرار النسبي	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$
التكرار النسبي المجمع الصاعد	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{14}{20}$	$\frac{19}{20}$	$\frac{20}{20}$
التكرار النسبي المجمع النازل	$\frac{20}{20}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

ملاحظة : نسمي أيضا كل تكرار نسبي تواترا، وعليه نُسمي أيضا التكرار النسبي المجمع الصاعد بالتواتر المجمع الصاعد والتكرار النسبي المجمع النازل بالتواتر المجمع النازل.

• حساب التكرار والتواتر المجمعين

تمرين : تمثل قيم هذه السلسلة درجات شدة الزلازل الأكثر عنفا في العالم خلال الفترة الممتدة من سنة 1900 إلى سنة 2015 حسب مقياس ريشتر.

8,8	8,5	8,5	8,5	8,6	8,6	9	9,5	8,5	9,2	8,7	9,1	8,6	8,5	9	8,8	8,8

عيّن التكرار المجمع الصاعد والتكرار المجمع النازل لكل قيمة من قيم هذه السلسلة.

حل : لتعيين التكرار المجمع الصاعد والتكرار المجمع النازل لكل قيمة من قيم هذه السلسلة نبدأ بترتيب قيم السلسلة في جدول تكراري ترتيبا تصاعديا فنتحصل على ما يلي:

شدّة الزلزال	8,5	8,6	8,7	8,8	9	9,1	9,2	9,5
التكرار	5	3	1	3	2	1	1	1
التكرار المجمع الصاعد	5	8	9	12	14	15	16	17
التكرار المجمع النازل	17	12	9	8	5	3	2	1

طريقة

- لحساب التكرار المجمع الصاعد لقيمة، نحسب مجموع تكرار هذه القيمة وتكرارات القيم الأصغر منها.
- لحساب التكرار المجمع النازل لقيمة، نحسب مجموع تكرار هذه القيمة وتكرارات القيم الأكبر منها.

تمرين: يمثل المدرّج التكراري المقابل توزيع عمال مؤسسة حسب أعمارهم a.

عيّن التواتر المجمع الصاعد والتواتر المجمع النازل لكل فئة.

حل : التكرار الكلّي لهذه السلسلة يساوي 200.

نلخص النتائج في الجدول التالي:

العمر a	$25 \leq a < 30$	$30 \leq a < 35$	$35 \leq a < 40$	$40 \leq a < 45$	$45 \leq a < 50$	$50 \leq a < 55$	$55 \leq a \leq 60$
التكرار	20	30	40	20	60	20	10
التواتر	0,1	0,15	0,2	0,1	0 ,3	0,1	0,05
التواتر المجمع الصاعد	0,1	0,25	0,45	0,55	0,85	0,95	1
التواتر المجمع النازل	1	0,9	0,75	0,55	0,45	0,15	0,05

طريقة

- لحساب التواتر المجمع الصاعد لفئة نحسب مجموع تواتر هذه الفئة وتواترات الفئات التي تسبقها.
- لحساب التواتر المجمع النازل لفئة نحسب مجموع تواتر هذه الفئة وتواترات الفئات التي تليها.

دوري الآن

سجّل علامات زملائك في اختبار أو فرض ثم نظّمها في فئات. احسب التواتر المجمع الصاعد والتواتر المجمع النازل لكل فئة.

3 مدى سلسلة إحصائية

تعريف

مدى سلسلة إحصائية هو الفرق بين أكبر قيمة و أصغر قيمة لها.

ملاحظة : المدى يعطي فكرة عن تشتت قيم السلسلة.

مثال

سجل طبيب درجة حرارة خمسة مرضى فكانت كما يلي

39,5°C 38,7°C 38°C 39°C 37,3°C

أعلى درجة حرارة مسجلة هي 39,5°C

أدنى درجة حرارة مسجلة هي 37,3°C

لدينا 2,2 = 37,3 - 39,5 إذن مدى هذه السلسلة هو 2,2°C.

4 وسيط سلسلة إحصائية

تعريف

وسيط سلسلة إحصائية هو قيمة تجزئ السلسلة إلى سلسلتين لهما نفس التّكرار.

ملاحظات

- الوسيط ليس بالضرورة قيمة من قيم السلسلة
- يُعبّر الوسيط Med عن السلسلة بالقول أنّ 50% على الأقل من قيم السلسلة هي أصغر من أو تُساوي Med و 50% على الأقل من قيم السلسلة هي أكبر من أو تُساوي Med.
- في حالة سلسلة إحصائية مجمعة في فئات، نبحث عن الفئة التي تشمل الوسيط و التي تسمى الفئة الوسيطية.
- إذا كان التكرار الكلي للسلسلة فرديا، أي إذا كان عدد قيم السلسلة فرديا فإن الوسيط هو القيمة المركزية لهذه السلسلة.

مثال 1

- عدد قيم السلسلة الإحصائية المرتّبة الآتية هو عدد فردي (لدينا 9 قيم).

4 5 11 11 15 17 23 23 25

4 قيم — الوسيط — 4 قيم

الوسيط هو 15.

- عدد قيّم السلسلة الإحصائية المرتّبة الآتية هو عدد زوجي (لدينا 10 قيم).

2 5 7 7 9 12 13 13 20 22

5 قيّم — الوسيط — 5 قيم

كل عدد محصور بين 9 و 12 يجزئ السلسلة إلى سلسلتين لهما نفس التكرار 4.

عامة، نأخذ مركز القيمتين 9 و 12 كوسيط أي : $\frac{9+12}{2} = 10,5$ ، الوسيط هو 10,5.

(في هذه الحالة، الوسيط ليس قيمة من قيم السلسلة).

مثال 2

الجدول التالي يبيّن توزيع 25 شخصا حسب أطوال قاماتهم بالمتر.

القامة t	$165 \leq t < 170$	$170 \leq t < 175$	$175 \leq t \leq 180$
التكرار	5	6	14
التكرار المجمع الصاعد	5	11	25

عدد الأشخاص هو 25 و هو عدد فردي، الوسيط هو القيمة الثالثة عشرة في سلسلة القامات (المرتبة) وحيث أن هذه القيمة موجودة في الفئة $175 < t < 180$.

فإن هذه الفئة تُسمى الفئة الوسيطية.

• تعيين وتفسير متوسط ووسيط ومدى سلسلة إحصائية

تمرين 1 : 1) عيّن المتوسط و الوسيط و المدى للسلسلة الإحصائية التالية :

3 ، 5 ، 4 ، 5 ، 11 ، 8 ، 10 ، 7 ، 4 ، 3 ، 10 ، 3 ، 4 ، 6 ، 7.

2) نضيف القيمتين 3 و 43 لهذه السلسلة، عيّن عندئذ المتوسط و الوسيط و المدى. ماذا تلاحظ؟ اشرح.

حل : 1) حساب المتوسط m:

$$m = \frac{7+6+4+3+10+3+4+7+10+8+11+5+4+5+3}{15} = \frac{90}{15} = 6.$$

لحساب الوسيط Med نرتب أولا السلسلة: 3 3 3 4 4 4 5 (5) 6 7 7 8 10 10 11

الوسيط Med هو 5 لأن 5 تجزئ السلسلة إلى سلسلتين لهما نفس التّكرار 7 .

المدى هو 3 - 11 أي 8.

2) لاحظ السلسلة الجديدة : 3 3 3 3 4 4 4 5 (5) 6 7 7 8 10 10 11 43

والوسيط لم يتغير في هذه الحالة وهو 5

متوسط السلسلة الجديدة هو: $8 = \frac{90+3+43}{17}$ ، مدى السلسلة الجديدة هو : 40 = 3 - 43 .

50% على الأقل من القيم أصغر أو تساوي الوسيط 5 و 50% على الأقل منها أكبر أو تساوي الوسيط 5.

تمرين 2 : 1) سجلت جمعية حماية المستهلك السعر بالدّينار لنفس البضاعة في N نقطة البيع .

السعر	50	51	53	54	55	56	57	58	60
التكرار	11	8	12	9	6	5	2	3	1

عيّن وسيط هذه السلسلة.

2) سجلت نفس الجمعية السعر بالدّينار لبضاعة أخرى في M نقطة البيع.

السعر	54	55	56	57	58	60
التكرار	12	18	10	8	9	3

عيّن وسيط هذه السلسلة.

حل : 1) التكرار الكلّي N يساوي 57. القيمة التي رتبتها $\frac{N+1}{2}$ أي $\frac{57+1}{2}$ أي 29 هي 53 و تمثل الوسيط.

2) التكرار الكلّي M يساوي 60.القيمة التي رتبتها $\frac{M}{2}$ أي $\frac{60}{2}$ أي 30 هي 55

و القيمة التي رتبتها $\frac{M}{2}+1$ أي 31 هي 56 إذن الوسيط يساوي $\frac{55+56}{2}$ أي 55,5.

طريقة

لتعيين وسيط سلسلة تكرارها الكلّي N، نرتبها ترتيبا تصاعديا أو تنازليا :

- إذا كان N فرديا فإن الوسيط يساوي القيمة التي رتبتها $\frac{N+1}{2}$.
- إذا كان N زوجيا فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2}+1$.

دوري الآن

جد سلسلة إحصائية قيمها أصغر من 46 و هي قواسم مختلفة للعدد الطبيعي 225 إذا علمت أن متوسطها 15,4، وسيطها 9 ، تكرارها الكلّي 5، مداها 42.

حساب تكرارات مجمعة و تواترات مجمعة

1 إليك درجات الحرارة المسجلة بإحدى المدن خلال شهر جوان (الوحدة: °C)

33	33	32	30	32	34	34	30	30	35
36	30	32	34	33	32	32	33	35	32
34	30	30	32	34	32	30	34	32	30

أ) ما هو عدد الأيام التي سجلت فيها درجات حرارة تفوق 34 درجة مئوية؟

ب) ما هو عدد الأيام التي سجّل فيها أقل من 34 درجة مئوية؟

جـ) ما هو عدد الأيام التي سجّل فيها 32 درجة مئوية على الأقل؟

د) ما هو عدد الأيام التي سجّل فيها 32 درجة مئوية على الأكثر؟

هـ) مثل هذه السلسلة بمخطط الأعمدة باستعمال مجدول الإكسال.

2 تحصّل تلاميذ قسم على العلامات التالية:

8	10	12	19	10	13	12	9	10	13
19	8	10	12	16	10	9	12	13	13
13	10	16	10	12	9	10	13	12	10

انقل ثم أتمم الجدول التالي:

العلامة	8	9	10	12	13	16	19
التكرار							
التكرار المجمع الصاعد							

3 الجدول التالي يقدم أسبابًا لحوادث الطرقات المسجلة سنة 2016 في المناطق الحضرية بالجزائر.

السبب	العنصر البشري	المركبة	الطريق والمحيط
النسبة المئوية	97,97%	0,95%	1,08%
التواتر المجمع الصاعد			
التواتر المجمع النازل			

انقل ثم أتمم الجدول أعلاه.

4 يمثل المخطط الدائري التالي أطوال قامات تلاميذ قسم إحدى المتوسطات.

25%
20%
40%
144CM
152CM
155CM
160CM

أتمم هذا المخطط ثم أتمم الجدول التالي.

القامة	144	152	155	160
التواتر المجمع الصاعد				
التواتر المجمع النازل				

5 قامت إدارة متوسطة بسبر الأراء لمعرفة المدّة التي يقضيها كل تلميذ لقطع المسافة الفاصلة بين منزله والمتوسطة فتحصّلت على النتائج المقدّمة في الجدول الآتي:

المدة t بالدقيقة	$5 \le t < 10$	$10 \le t < 15$	$15 \le t < 20$	$20 \le t \le 25$
عدد التلاميذ	180	150	50	20

عيّن التكرار المجمع الصاعد و التكرار المجمع النازل لكل فئة.

6 يبيّن المدرّج التكراري التّالي الاستهلاك السنوي للكهرباء بمجمع سكني يضم 200 عائلة مقاسا بالميغاوات ساعي (MWh)

عدد العائلات
60
50
40
30
20
10
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
الفئة (الإستهلاك ب MWh)

عيّن التواتر المجمع الصاعد و التواتر المجمع النازل لكل فئة.

استعمال مجدول لحساب مؤشرات سلسلة

7 تعطى السلسلة الإحصائية التالية

4	10	8	4	3	2	4

أ) عيّن مدى، وسيط و متوسط هذه السلسلة.

ب) عيّن منوال هذه السلسلة (هي قيمة ذات أكبر تكرار)

جـ) تأكد من نتائج السؤالين السابقين باستعمال مجدول إكسال كما يلي:

- احجز السلسلة الواردة في السطر الأول من المجدول أدناه.

	A	B	C	D	E	F	G
1	5	10	10	8	4	3	2
2	المدى						
3	الوسيط						
4	المتوسط						
5							

- احجز في الخلية B2 الدستور

=MAX(A1 : G1)-MIN(A1 : G1)

ثم انقر على ENTER

- احجز في الخلية B2 الدستور

=MEDIANE(A1:G1) ثم انقر على ENTER

- احجز في الخلية B2 الدستور

=MOYENNE(A1 :G1) ثم انقر على ENTER

- احجز في الخلية B2 الدستور =MODE(A1 :G1)

ثم انقر على ENTER.

8 اقترح سلسلة تكرارها الكلّي 7 و متوسطها 7.

9 اقترح سلسلة تكرارها الكلّي 7 و وسيطها 7.

10 اقترح سلسلة متوسطها 9 و مداها 16.

11 اقترح سلسلة وسيطها 20 و متوسطها 17

12 إليك سلسلة إحصائية وسيطها Med.

12	8	6	10	2	4

اقترح سلسلة أخرى لها نفس التكرار الكلّي و وسيطها 3Med.

13 عيّن كل السلاسل الإحصائية التي تكرارها الكلّي 3 و وسيطها 13 ومداها 8 و متوسطها يساوي وسيطها.

14 يبيّن الجدول التالي متوسط درجات الحرارة الشهرية على مدار سنة في مدينتين «أ» و «ب» (الوحدة °C).

	المدينة «أ»	المدينة «ب»
جانفي	- 3	6
فيفري	- 7	8
مارس	- 2	10
أفريل	10	14
ماي	10	16
جوان	20	19
جويلية	24	20
أوت	28	22
سبتمبر	21	17
أكتوبر	11	14
نوفمبر	5	8
ديسمبر	- 3	5

عيّن لكل من المدينتين متوسطا، وسيطا ، مدى درجات الحرارة. فسّر هذه النتائج.

15 الجدول التالي يمثل توزيع النفايات تم جمعها على شاطئ.

أنواع النفايات	البلاستيك	الزجاج	الورق
الكتلة (kg)	60	40	50

مثّل هذا الجدول بمخطط دائري باستعمال المجدول إكسال بـ: - حجز الجدول التالي في ورقة إكسال.

	A	B	C
1	الورق	الزجاج	البلاستيك
2	50	40	60

- تحديد الخلايا A1، B1، C1، A2، B2، C2

- النقر على Insertion ثم على Secteurs و اختيار .

فيظهر المخطط الدّائري.

16 تعطى السلسلة الإحصائية:

الفئات	$7 \leq t < 8$	$8 \leq t < 9$	$9 \leq t < 10$
التكرارات	6	1	4

أ) عين الفئة التي تشمل الوسيط

ب) مثّل هذه السلسلة بمدرج تكراري باستعمال البرمجية جيوجيبر ابحجز الطلبية

Histogramme({7,8,9,10},{6,1,4})

ثم الضغط على Enter .

أؤكد تعلماتي

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة	الإجابات (1)	(2)	(3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	في الجدول الإحصائي أدناه القيمة: 7 ، 9 ، 14 ، 28 التكرار: 6 ، 10 ، 3 ، 1 التكرار المجمع الصاعد للقيمة 14 هو	13	19	30	94 و 95
2	في الجدول الإحصائي أدناه القيمة: 10 ، 20 ، 30 ، 40 التكرار: 50 ، 60 ، 70 ، 80 التكرار المجمع النازل للقيمة 40 هو	40	80	260	94 و 95
3	وسيط السلسلة الإحصائية : 60 40 20 8 هو	30	20	40	96 و 97
4	مدى السلسلة 8,1 5,7 3 2,8 هو	6	6,9	5,3	96 و 97
5	سلسلة إحصائية مرتبة تكرارها الكلي 97. وسيط هذه السلسلة هو القيمة التي رتبتها...	49	50	51	96 و 97
6	متوسط السلسلة 13 1 4 10 12	أصغر من وسيطها	أكبر من وسيطها	يساوي وسيطها	97

أدمج تعلّماتي

وضعية

إليك حصيلة الميداليات الذهبية للدول الفائزة بها خلال إحدى دورات الألعاب الأولمبية.

عدد الميداليات الذهبية	1	2	⬡	4	5	6	7	11	13	14	16	26	⬡	32
التكرار	11	3	2	1	2	2	1	1	1	2	1	1	1	1

وسيط السلسلة : 3 ميداليات. متوسط السلسلة : 7 ميداليات.

1) حدّد القيم التي لا تظهر في الجدول.

2) 69% من الدول الفائزة بميداليات، تحصّلت على الأقل على ميدالية ذهبية.

ما هو عدد الدول التي تحصّلت فقط على ميداليات فضية أو برونزية؟ (نعطى قيمة مقرّبة إلى الوحدة)

تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: • فهم وتحليل النص المكتوب • عمّ يتحدث النص؟

• رتّب المعطيات ثمّ حدّد التعليمة (أو التعليمات).

تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل مناسبة: • ما هي المعطيات التي تساعدني في البحث عن القيم المخفية في الجدول؟ • ما هو الإجراء المناسب الذي أستعمله؟

تنفيذ استراتيجية الحل المختارة: • استعمال الوسيط. • استعمال الوسط الحسابي وحل معادلة.

• استعمال «أخذ نسبة من عدد» وحل معادلة. • تحرير الحل والشرح بجمل واضحة.

17 عيّن خمس سلاسل إحصائية التكرار الكلي لكل منها 3 و أيضا في كل منها المدى و المتوسط والوسيط متساوية.

18 إليك سلسلة أطوال أوتار خمسة مثلثات قائمة (بالسنتيمتر):

$\sqrt{12}$ ، $4\sqrt{3}$ ، $\sqrt{75}$ ، $6\sqrt{3}$ ، $\sqrt{27}$.

عيّن مدى، وسيط ومتوسط هذه السلسلة.

19 يمثل المخطط بالأعمدة التالي توزيع مجموعة أشخاص حسب القنوات التلفزيونية التي شاهدوها في نهاية الأسبوع.

عدد الأشخاص

1300 1250 1200 1150 1100 1050 1000 950 900 850 800 750 700 650 600 550 500 450 400 350 300 250 200 150 100 50 0

القناتان A وB | القناتان B و D | القناة C | القناة D | القناة E

انقل ثم أتمم الجدول التالي:

القناة	A	B	C	D	E
عدد الأشخاص					
التواتر					
التواتر المجمع الصاعد					
التواتر المجمع النازل					

20 وسيط السلسلة الإحصائية المعطاة أدناه يساوي 6 وتكرارها الكلي هو 10.

القيمة	4	5	8	12
التكرار	3	a	b	4

احسب كلا من التكرارين a و b؟

21 الجدول التالي متعلق بالعلامات التي تحصّل عليها تلاميذ قسم في اختبار الرياضيات.

العلامة	8,5	10	12,5	14	16,5
التكرار المجمع الصاعد	3	13	22	29	30

عيّن التواتر المجمع الصاعد و التواتر المجمع النازل لكل علامة من هذه العلامات.

22 معدل سلسلة علامات قسم في اختبار هو 11,5 و وسيطها 11.

أ) حذفت أصغر علامة وهي 4 التي تحصّل عليها تلميذ واحد وأكبر علامة وهي 19 التي تحصل عليها كذلك تلميذ واحد.

ما هو معدل العلامات و وسيطها بعد هذا الحذف؟

ب) حذفت فقط أكبر علامة وهي 19 التي تحصّل عليها تلميذ واحد وأصبح معدل العلامات 11,25.

ما هو عدد تلاميذ هذا القسم؟

23 استعمل اللمسات M+ ، M- ، MR ، CE/C ، = لحاسبة لتعيين متوسط السلسلة الإحصائية التالية:

القيم	97	104	99
التكرار	2	3	5

24 عندما نحجز الدستور =ALEA() في خلية من صفحة مجدول و ننقر على اللمسة ENTER يظهر عدد عشوائي a حيث $0 \leq a < 1$.

كل نقر على اللمسة F9 يُظهر عددا عشوائيا آخر ينتمي إلى نفس المجال.

أ) افتح صفحة إكسال و احجز في الخلية A1 الدستور =ALEA() ثم انقر على ENTER

ب) حدد A1 ثم اسحب الفأرة من A1 إلى A50 لتتحصل على سلسلة تكرارها الكلي 50.

احسب مدى، وسيط و متوسط هذه السلسلة.

ترتيب سلسلة إحصائية باستعمال Excel

	A	B	C	D	E	F
	12,5		علامات تلميذ في استجوابات الرياضيات للفصل الأول			
1	8,5					
2	11					
3	14					
4	13,5					
5	10					
6						

رتّب، باستعمال مجدول إكسل، قيم السلسلة

12,5، 8,5، 14، 11، 13,5، 10.

1) افتح ورقة Excel و احجز القيم الظاهرة على الورقة المقابلة:

2) حدد الخلايا A1، A2، A3، A4، A5، A6.

3) انقر على Trier et filtrer ثم انقر على Trier du plus petit au plus grand

حساب التكرارات المجمعة الصاعدة و التكرارات المجمعة النازلة باستعمال Excel

لاستعمال مجدول إكسل، في حساب التكرارات المجمّعة الصاعدة (أو النازلة):

افتح ورقة Excel و احجز القيم الظاهرة على الورقة المقابلة:

	A	B	C	D
1	علامات تلميذ قسم	التكرار	التكرار المجمع الصاعد	التكرار المجمع النازل
2	9,5	5		
3	10	7		
4	12,5	8		
5	13	3		
6	14,5	4		
7	15	2		
8	17	1		

حساب التكرار الكلي

احجز في الخلية A10 : التكرار الكلي و في الخلية B10 : =SOMME(B2 :B8)

ثم انقر على اللمسة ENTER.

حساب التكرارات المجمعة الصاعدة والنازلة

أ) احجز في الخلية C2 : =B2 ثم انقر على ENTER.

واحجز في الخلية C3 : =C2+B3 ثم انقر على ENTER.

ب) احجز في الخلية D2 : =B10 ثم انقر على اللمسة F4 ثم على ENTER فيظهر B10.

احجز في الخلية D3 : =D2-B2 وانقر على ENTER.

جـ) حدد الخلية C3 و ضع عليها الفأرة حتى يظهر 12 وانقر مرتين على +.

د) حدد الخلية D3 و ضع عليها الفأرة حتى يظهر 25 وانقر مرتين على +.

دوري الآن

إليك توزيع 40 تلميذا حسب أطوال قاماتهم بالسنتيمتر.

أطوال القامات	154	156	158	159	160	162	163	165
التكرار	2	2	3	3	5	6	9	10

احجز هذه السلسة في العمودين A و B من صفحة إكسال.

استعمل الطلبيات المناسبة لحساب التكرار المجمع الصاعد والتكرار المجمع النازل لكل قامة في العمودين C و D.

احسب وسيط قامات هؤلاء التلاميذ باستعمال الطلبية MEDIANE في مجدول جيو جيبرا.

9 خاصية طالس

ساتعلّم في هذا الباب

- معرفة خاصية طالس و استعمالها في حساب أطوال و إنجاز براهين و إنشاءات هندسية بسيطة.

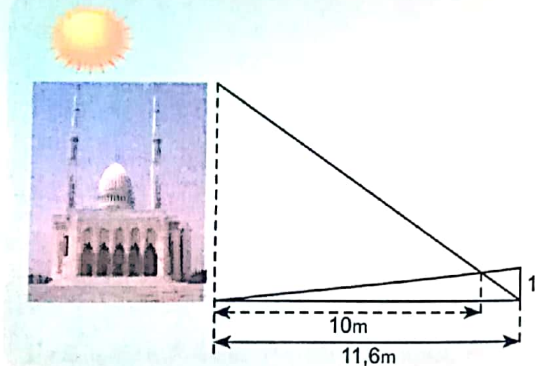
يُعتبر طالس أحد حكماء الإغريق السبعة والذي كان مهتما بدراسة الهندسة وله العديد من الأعمال العلمية منها:
- مبرهنة حول نسب بين أطوال قطع المستقيمين المتقاطعين في نقطة عندما يقطعهما مستقيمان متوازيان.
- قياس ارتفاع أهرامات مصر بطريقة الظل.

طالس 625-546 ق م

تحدّ

في فترة معينة من يوم مشمس، تساءل فريد عن ارتفاع مئذنة المسجد الموجود بالحي الذي يسكن فيه.

اقترح عليه مقران طريقة مكّنتهما من رسم الشكل المقابل ببعض القياسات. اشرح الطريقة المقترحة ثم ساعدهما على إيجاد ارتفاع المئذنة.



أستعدّ

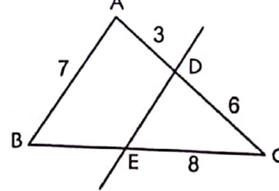
أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

1) من المساواة $\frac{1,5}{x} = \frac{3}{4}$ ينتج أن $x = 2$.

2) ABC مثلث. I منتصف [AB] و J منتصف [AC].
ينتج أن (IJ)//(BC).

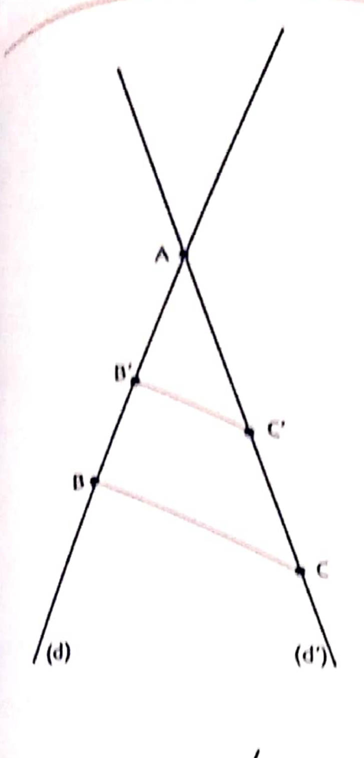
3) ABC مثلث. I منتصف [AB] و J منتصف [AC]. ينتج أن $IJ = \frac{1}{2}BC$.

4) ABC مثلث حيث (AB)//(DE).
إذن BE = 4.

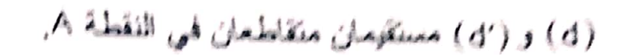


5) في الشكل المقابل حيث (CE)//(DF)
ينتج: أطوال المثلث ACE متناسبة مع أطوال المثلث ADE.

1 خاصية طالس



1) الحالة الأولى



(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A.

B نقطة من (d) و C نقطة من (d')، تختلفان عن A.

B' نقطة من [AB) و C' نقطة من [AC)

بحيث $(BC) \parallel (B'C')$، كما في الشكل.

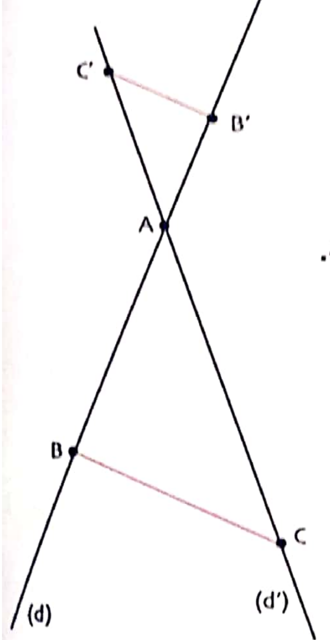
انقل وأتمم : $\frac{AB'}{AB} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

تطبيق عددي

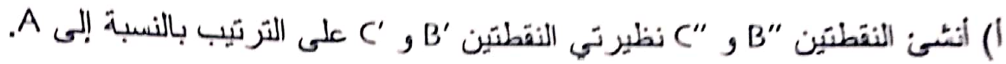
1) نفرض أنّ $AB = 6cm$ ، $AC = 7cm$ و $AB' = 3,2cm$. احسب AC'.

2) إذا كان $BC = 6,1cm$، احسب $B'C'$.

2) الحالة الثانية



لاحظ وضعية النقط A، B، B' و النقط A، C، C' في الشكل المرفق.



أ) أنشئ النقطتين B'' و C'' نظيرتي النقطتين B' و C' على الترتيب بالنسبة إلى A.

ب) علما أنّ $(BC) \parallel (B'C')$، برّر توازي المستقيمين (BC) و (B''C'').

جـ) اشرح لماذا $\frac{B''C''}{BC} = \frac{AC''}{AC} = \frac{AB''}{AB}$.

د) استنتج أن $\frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB}$.

تطبيق عددي

نفرض أنّ $AB = 3,2cm$ ، $AC = 4,5cm$ و $BC = 3cm$

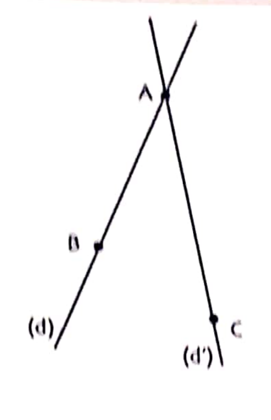
- احسب AC' علما أنّ $AB' = 1,6cm$.
- استنتج قيمة $B'C'$.

3) انقل ما يلي وأتمم: « A، B، B' تقع على استقامية والنقط A، C، C' تقع كذلك على استقامية.

إذا كان المستقيمان (BC) و... متوازيين فإن $\frac{\dots}{BC} = \frac{AC'}{\dots} = \frac{\dots}{AB}$ ».

يسمى هذا النص «خاصية طالس».

2 الخاصية العكسية لخاصية طالس



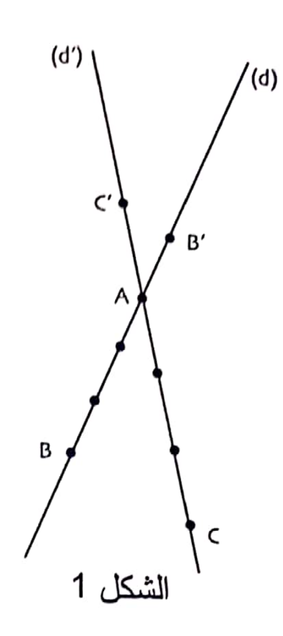
في الشكل المقابل، (d) و (d′) مستقيمان متقاطعان في نقطة A.

B نقطة من (d) و C نقطة من (d′).

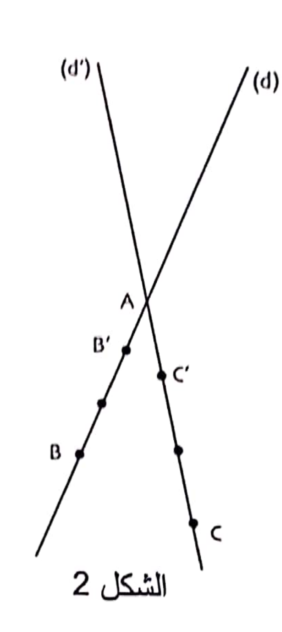
1) طلب الأستاذ من تلاميذه تعيين نقطتين B′ من (d) و C′ من (d′)

بحيث $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{1}{3}$

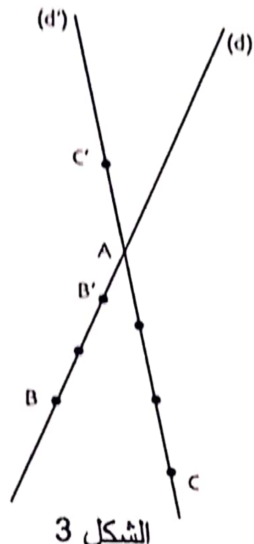
إليك الأشكال 1 ، 2 ، 3 المُنجزة من طرف ثلاثة تلاميذ



الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3

أ) اشرح توافق الأشكال 1، 2 و 3 مع الشروط السّابقة.

ب) هل في كل شكل من الأشكال 1، 2 و 3، (BC) و (B′C′) متوازيان؟ (يمكنك التحقق باستعمال الأدوات الهندسية).

2) انقل وأتمم

«النقط A، B، B′ تقع في استقامية والنقط A، C، C′ تقع أيضا في استقامية وكذلك النقط A، B، B′ مرتبة بنفس ترتيب النقط A، C، C′.

إذا كان $\frac{....}{AC} = \frac{....}{AB}$ فإن المستقيمين (BC) و (B′C′)...».

هذا النص يسمى «الخاصية العكسية لخاصية طالس».

ملاحظة : النقطة A، B، B′ مرتّبة بنفس ترتيب النقطة A، C، C′ يعني أيضا أن موقع B′ بالنسبة إلى A و B يماثل موقع C′ بالنسبة إلى A و C.

يمكن التعبير عن هذه الوضعية بتنظيم الرؤوس كما يلي:

B	A	B′
C	A	C′

B	B′	A
C	C′	A

A	B	B′
A	C	C′

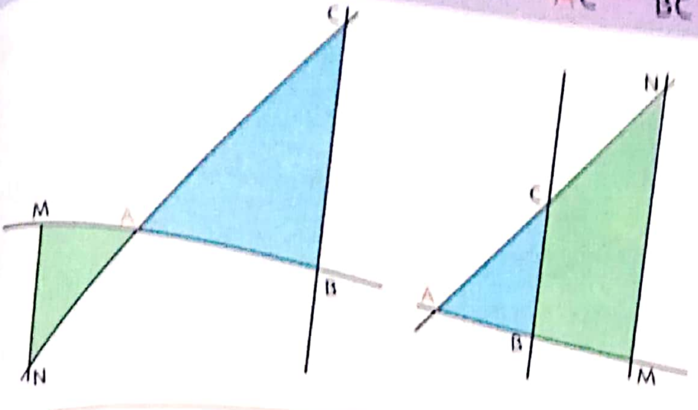
... إلخ

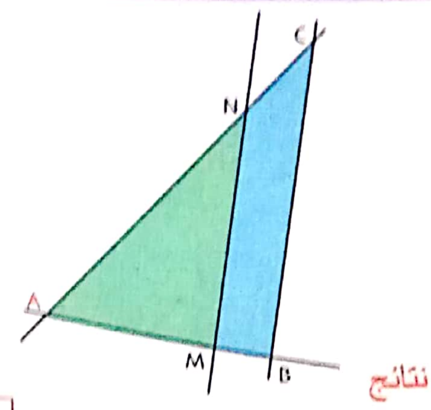
1 خاصية طالس

خاصية

(BM) و (CN) مستقيمان متقاطعان في النقطة A

إذا كان (MN) و (BC) متوازيين فإن $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$.





نتائج

الجدول الآتي هو جدول تناسبية

MN	AN	AM	اطوال أضلاع المثلث AMN
BC	AC	AB	اطوال أضلاع المثلث ABC

والمثلث AMN هو تكبير أو تصغير للمثلث ABC.

ملاحظة 1: (BM) و (CN) مستقيمان متقاطعان في النقطة A.

يكفي عدم تساوي نسبتين من النسب $\frac{AM}{AB}$ ، $\frac{AN}{AC}$ و $\frac{MN}{BC}$ للقول أنّ المستقيمين (MN) و (BC) غير متوازين.

ملاحظة 2: تسمح خاصية طالس بحساب الأطوال و النسب و إثبات عدم توازي مستقيمين.

2 خاصية طالس وتناسب الأطوال

ABC و AB′C′ مثلثان في وضعية طالس.

• لاستنتاج الأطوال المتناسبة في المثلثين

ننظم رؤوسهما كالآتي :

A	B	C
A	B′	C′

• ثم ننشئ جدول التناسبية التالي:

AB	AC	BC
AB′	AC′	B′C′

xk

معامل التناسبية هو العدد الموجب تماما k.

ولدينا $AB' = k \times AB$ و $AC' = k \times AC$ و $BC' = k \times BC$.

في الحالة $k < 1$: k هو معامل التصغير

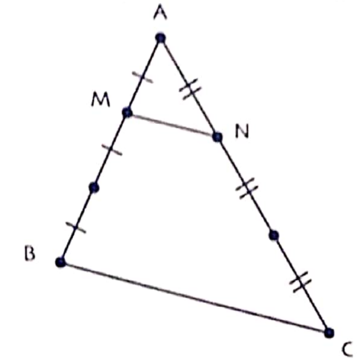
والمثلث AB′C′ تصغير للمثلث ABC.

في الحالة $k > 1$: k هو معامل التكبير

و المثلث AB′C′ تكبير للمثلث ABC.

مثال

المثلثان AMN و ABC في وضعية طالس.



لدينا $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{AC} = \frac{1}{3}$.

ومنه $AM = \frac{1}{3}AB$ و $AN = \frac{1}{3}AC$

و $MN = \frac{1}{3}BC$.

لدينا معامل التناسبية هو $\frac{1}{3}$ إذن المثلث AMN هو تصغير للمثلث ABC.

• حساب أطوال

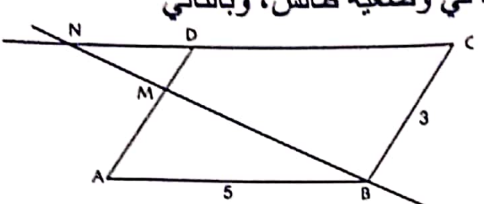
تمرين: ABCD متوازي أضلاع حيث $AB = 5$ و $BC = 3$ (الوحدة 1cm)

M نقطة من القطعة $[AD]$ حيث $AM = 2$. المستقيم (BM) يقطع المستقيم (DC) في N.

انجز شكلا مناسبا ثم أحسب DN.

حل: حساب DN: لدينا $(AB)//(CD)$ (لأنّ ABCD متوازي أضلاع)، بما أن N تقع على (DC)

إذن $(AB)//(DN)$، ينتج أنّ المثلثين MAB و MDN في وضعية طالس، وبالتالي



يكون $\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MN} = \frac{AB}{DN}$.

نحتفظ بالمساواة المناسبة $\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DN}$

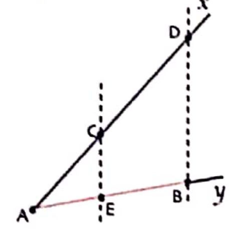
أي $\frac{1}{2} = \frac{5}{DN}$ ومنه $DN = \frac{5}{2} = 2,5$.

• إنشاء قطعة مستقيم طولها معلوم

تمرين: (وحدة الأطوال هي السنتيمتر) أنشئ قطعة مستقيم $[AB]$ بحيث يكون $AB = \frac{14}{3}$.

حل: ملاحظة: يمكن كتابة $AB = \frac{14}{3}$ على الشكل $3 \times AB = 7 \times 2$ ثمّ على شكل تناسب $\frac{3}{7} = \frac{2}{AB}$

وتوظيف خاصية طالس.



نرسم نصفي مستقيمين $[Ax)$ و $[Ay)$، ونعيّن على $[Ax)$ نقطتين C و D

حيث $AC = 3$ و $AD = 7$. كما نعيّن على $[Ay)$ نقطة E حيث $AE = 2$.

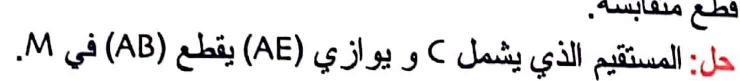
نرسم الموازي للمستقيم (CE) الذي يشمل D فيقطع $[Ay)$ في نقطة B.

إنّ $AB = \frac{14}{3}$. (ويمكن تبرير ذلك باستعمال خاصية طالس)

• تقسيم قطعة مستقيمة

تمرين: ABC مثلث. D هي نظيرة B بالنسبة إلى C و E نظيرة C بالنسبة إلى D. قسم الضلع $[AB]$ إلى 3

قطع متقابسة.



حل: المستقيم الذي يشمل C و يوازي (AE) يقطع (AB) في M.

المستقيم الذي يشمل D و يوازي (AE) يقطع (AB) في N.

• المثلثان BCM و BEA في وضعية طالس إذن $\frac{BM}{BA} = \frac{BC}{BE} = \frac{1}{3}$

و منه $BM = \frac{BA}{3}$ (*)

• المثلثان BDN و BEA في وضعية طالس إذن $\frac{BN}{BA} = \frac{BD}{BE} = \frac{2}{3}$ و منه $BN = \frac{2BA}{3}$

• لدينا $NA = BA - BN = BA - \frac{2BA}{3} = \frac{BA}{3}$ (**)

• لدينا C منتصف $[BD]$ و $(ND) // (MC)$ إذن M منتصف $[BN]$ و منه $BM = MN$ (***)

من (*) و (**) و (***) نستنتج أن $BM = MN = NA = \frac{BA}{3}$.

و هكذا قسّمنا الضلع $[AB]$ إلى 3 قطع متقايسة.

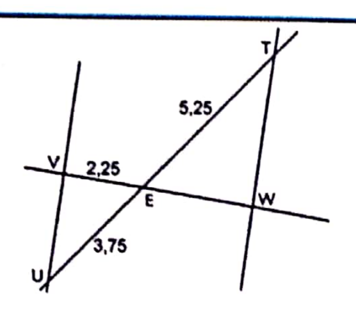
دوري الآن

في الشكل المقابل المستقيمان (UT) و (VW)

متقاطعان في النقطة E.

والمستقيمان (UV) و (WT) متوازيان.

احسب الطول EW.



3 الخاصية العكسية لخاصية طالس

خاصية

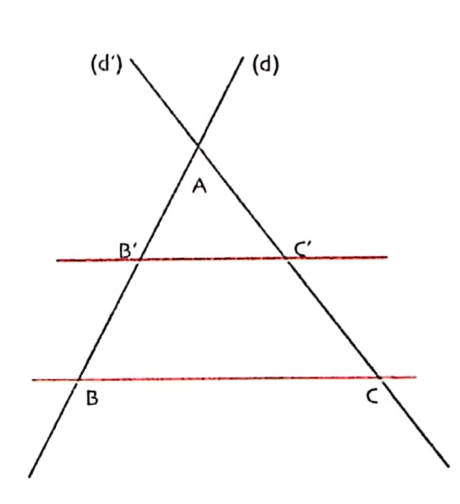
(d) و (d′) مستقيمان متقاطعان في النقطة A.

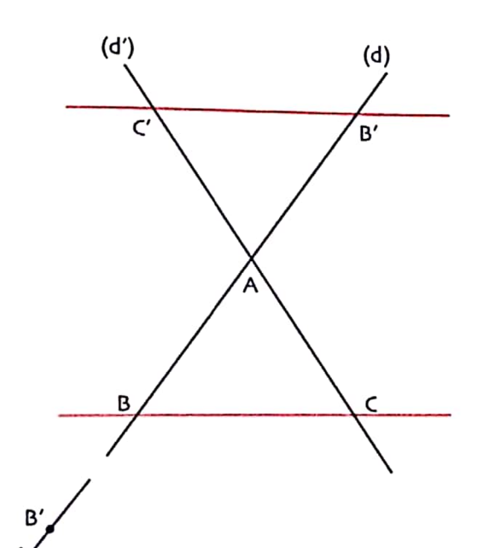
B و B′ نقطتان من (d) تختلفان عن A.

C و C′ نقطتان من (d′) تختلفان عن A.

إذا كان $\frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB}$ وكانت النقط A، B، B′ و النقط A، C، C′ مرتبة بنفس الترتيب فإن المستقيمين (BC) و (B′C′) متوازيان.

يمكن ترجمة هذه الخاصية بإحدى الوضعيتين التاليتين:

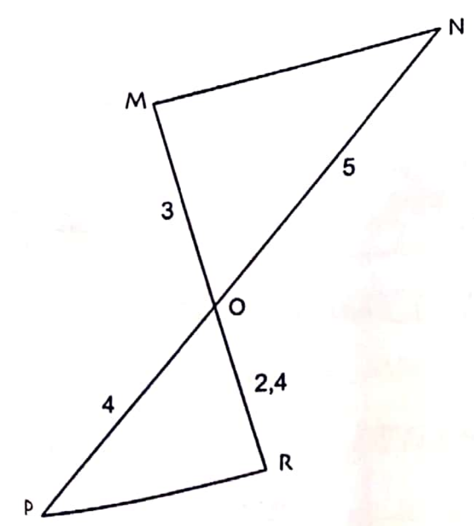




ملاحظة: في الشكل المقابل، لدينا $\frac{1}{2} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB}$.

النقط A، B، B′ تقع على استقامة واحدة و النقط A، C، C′ تقع أيضا على استقامة واحدة. هذه النقط ليست مرتّبة بنفس الترتيب.

ينتج أن المستقيمين (BC) و (B′C′) غير متوازيين.



مثال: في الشكل المقابل

لدينا $1,25 = \frac{3}{2,4} = \frac{OM}{OR}$ و $1,25 = \frac{5}{4} = \frac{ON}{OP}$

إذن $\frac{ON}{OP} = \frac{OM}{OR}$.

و بماأن النقط O، P، N و النقط O، R، M مرتبة بنفس الترتيب فإن (PR) // (MN).

• إثبات توازي (أو عدم توازي) مستقيمين

تمرين: في الشكل المقابل تُعطى: $AB = 3,2cm$ ، $AD = 3,5cm$ ، $DC = 1,8cm$ ، $DF = 1,5cm$ ، $AE = 4,6cm$ ، $BD = 4,2cm$

1) بيّن أنّ المستقيمين (AB) و (CF) متوازيان؟

2) هل المستقيمان (BD) و (EF) متوازيان؟

حل: 1) • النقاط A، D، F والنقاط B، D، C في استقامية وبنفس الترتيب.

• $\frac{DB}{DC} = \frac{4,2}{1,8}$ و $\frac{DA}{DF} = \frac{3,5}{1,5}$ ولدينا $3,5 \times 1,8 = 6,3$ و $1,5 \times 4,2 = 6,3$ إذن $\frac{DA}{DF} = \frac{DB}{DC}$.

• على المستقيمين (CB) و (FA) المتقاطعين في النقطة D، النقاط A، D، F من جهة والنقاط B، D، C من جهة أخرى في استقامية وبنفس الترتيب و $\frac{DA}{DF} = \frac{DB}{DC}$ فحسب الخاصية العكسية لطالس نستنتج أنّ $(CF) /\!/ (AB)$.

2) • النقاط A، B، E والنقاط A، D، F في استقامية وبنفس الترتيب.

• $\frac{AD}{AF} = \frac{3,5}{3,5 + 1,5} = \frac{3,5}{5}$ و $\frac{AB}{AE} = \frac{3,2}{4,6}$ ولدينا $3,2 \times 5 = 16$ و $4,6 \times 3,5 = 16,1$

إذن $\frac{AB}{AE} \neq \frac{AD}{AF}$:

• لوكان المستقيمان (BD) و (EF) متوازيين لكان $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AF}$ حسب خاصية طالس، لكن المساواة خاطئة، إذن المستقيمان (BD) و (EF) غير متوازيين.

• إنشاء النقطة التي تقسم قطعة مستقيم إلى نسبة معلومة

تمرين: $[AB]$ قطعة مستقيم. أنشئ نقطة M من القطعة $[AB]$ حيث $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$. (استعمل مسطرة غير مدرّجة ومدور)

حل: نرسم مستقيمين (d_1) و (d_2) متوازيين ويشملان النقطتين A و B على الترتيب ومدرجين بانتظام وبنفس الوحدة.

للحصول على وضعية طالس يكفي تعيين نقطة E على (d_2) بحيث $BE = 2$ ونقطتين K و F على (d_1) بحيث $AK = AF = 3$.

لدينا (EF) يقطع (AB) في M.

بتطبيق خاصية طالس في المثلثين MAF و MBE ينتج أن $\frac{MA}{MB} = \frac{AF}{EB} = \frac{3}{2}$

وبالتالي M هي النقطة من $[AB]$ تقسم $[AB]$ في النسبة $\frac{3}{2}$.



(xy) مستقيم، A و B نقطتان منه.

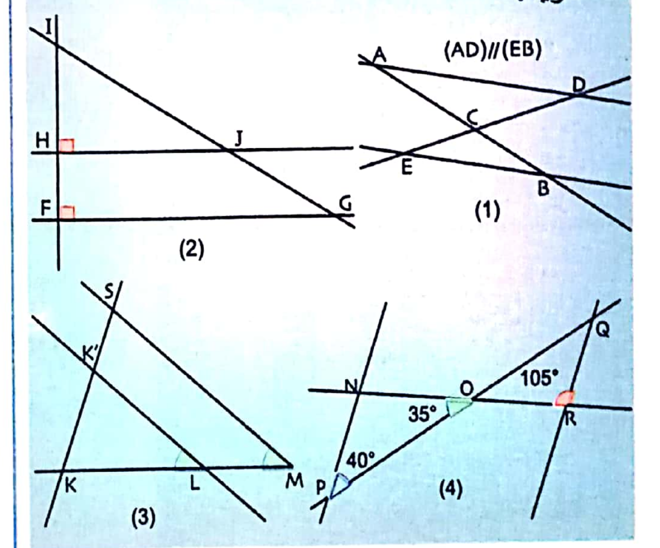
استعمل مسطرة غير مدرّجة ومدور لإنشاء نقطة C من المستقيم (xy) حيث $\frac{CA}{CB} = \frac{2}{5}$.

خاصية طالس

1 في الشكل المقابل،
المستقيمان (AB) و (EF) متوازيان.
1) اذكر المثلثين اللذين أطوال أحدهما متناسبة مع أطوال أضلاع الآخر.
2) استنتج كل النسب المتساوية.

2 في الشكل المقابل،
(EF) يوازي (BC).
احسب BC.

3 برّر أنّه في كل شكل من الأشكال الأربعة الآتية يمكن تطبيق خاصية طالس ثم اكتب النسب الثلاث المتساوية.



4 في الرباعي ABCD الآتي، (AB) و (CD) متوازيان.
(AC) و (BD) يتقاطعان في النقطة O.
1) احسب القيمتين المضبوطتين لكل من OD و CD
2) جد المدوّر إلى الجزء من 10 لكل من OD و CD

5 الأطوال في الشكل هي بالسنتيمتر وليست حقيقية.
المستقيمان (GF) و (EH) متقاطعان في O.
المستقيمان (EF) و (GH) متوازيان.
أ) احسب كُلّا من الطولين OF و GH.
ب) أيّ من المثلثين OEF و OGH يمثل تكبيرا للآخر؟ اذكر معامل التكبير.

6 BEM مثلث حيث BE = 12cm ،BM = 9cm و EM = 6cm.
K هي نقطة من [BE] حيث EK = 4cm والمستقيم الذي يشمل K ويوازي (EM) يقطع (BM) في L.
1) أنجز شكلا مناسبا.
2) احسب محيط المثلث BKL.

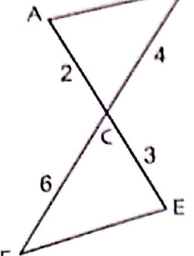
7 1) أ) ارسم مثلثا ABC حيث AB = 4cm ، AC = 5cm ، BC = 6cm.
ب) علّم النقطتين I و J حيث : I ∈[AB] ، J ∈[AC] و BI = CJ = 1cm.
2) يبدو أنّ المستقيمين (IJ) و (BC) متوازيان، هل هذا صحيح؟ برّر جوابك.

8 وحدة الطول هي السنتيمتر:
في الشكل المقابل (NP)//(ML)
و (MN) و (LP) يتقاطعان في A.
احسب كلا من الطولين AP و LP.

9 وحدة الطول هي السنتيمتر، والأطوال على الشكل ليست حقيقية.
احسب AF.

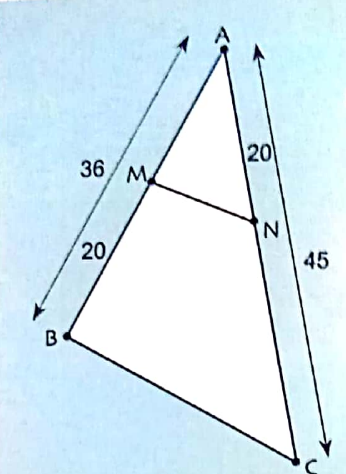
الخاصية العكسية لخاصية طالس

10 لاحظ الشكل المقابل.



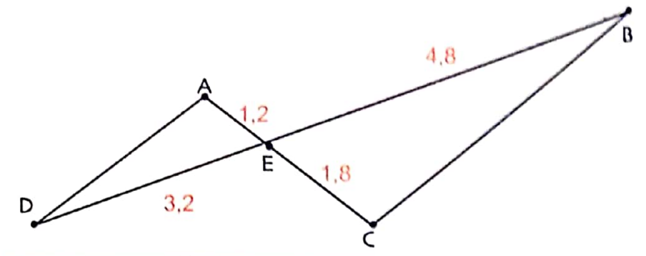
هل (AB) يوازي (EF)؟

11 لاحظ الشكل التالي:



بين أن المستقيمين (MN) و (BC) متوازيان.

12 لاحظ الشّكل المعطى: هل (BC) يوازي (AD)؟



13 لاحظ الشكل المعطى:

هل (EF) يوازي (BD)؟

14 لاحظ الشكل المعطى:

المستقيمان (d_1) و (d_2) متعامدان.

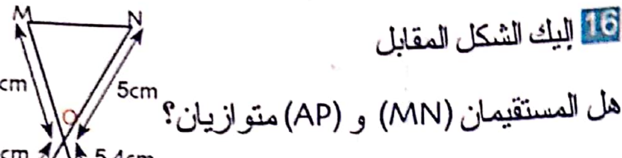
هل (AB) يوازي (DC)؟

15 لاحظ الشكل المعطى

ABCD مستطيل. برهن أن المستقيمين (MN) و (BD) متوازيان.

وضع نقط على مستقيم

16 إليك الشكل المقابل



هل المستقيمان (MN) و (AP) متوازيان؟

إليك إجابتَي التلميذين «يونس» و «إيناس».

إجابة يونس

النقط M، O، A و النقط N، O، P
في استقامية وفي نفس الترتيب
$\frac{ON}{OP} = \frac{5}{3} \simeq 1,7$ و $\frac{OM}{OA} = \frac{9}{5,4} \simeq 1,7$
حسب الخاصية العكسية لخاصية طالس،
المستقيمات (MN) و (AP) متوازيات.

إجابة إيناس

النقط M، O، A و النقط N، O، P
في استقامية وفي نفس الترتيب
$\frac{OP}{ON} = \frac{3}{5} = 0,6$ و $\frac{OA}{MO} = \frac{5,4}{9} = 0,6$
حسب الخاصية العكسية لخاصية طالس،
المستقيمات (MN) و (AP) متوازيات.

أيّ التلميذين على صواب؟

17 ارسم قطعة مستقيم [AB].

أنشئ، دون استعمال مسطرة مدرّجة، النّقطة M من [AB] حيث $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{7}$.

18 ارسم مستقيما (AB).

أنشئ، دون استعمال مسطرة مدرّجة، النّقطة M من (AB) ولا تنتمي إلى [AB] حيث $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{9}$.

19 ضع نقطتين متمايزتين M و N، أنشئ نقطة P من (MN) حيث $\frac{PM}{PN} = \frac{11}{7}$.

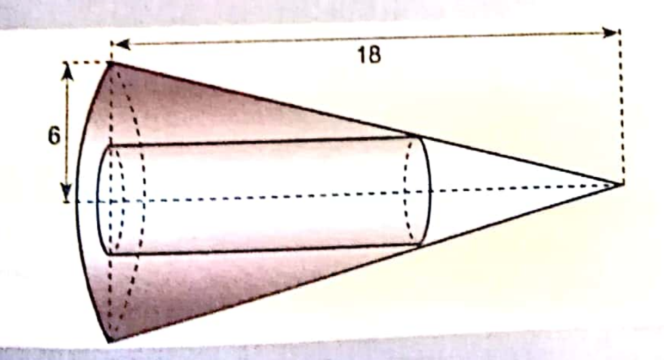
أؤكد تعلماتي

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة	الإجابات (1)	(2)	(3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	في الشكل الآتي $(BC)//(IJ)$. ينتج	$x=6$	$x=1,5$	$x=\frac{3}{2}$	106 و 107
		$y=6$	$y=\frac{9}{2}$	$y=4,5$	
2	في الشكل الآتي، $(LM)//(BC)$ ينتج.......	$x=4$	$x=\frac{1}{2}$	$x=8$	106 و 107
		$y=6$	$y=24$	$y=3$	
3	في الشكل الآتي، ينتج.....	(EF) لا يوازي (BC)	$(BC)//(EF)$	$BC=\frac{1}{2}EF$	108 و 109
4	نختار تدريجا منتظما على $[AB]$ ونرسم مستقيمات موازية لـ (BC)، كما هو مبيّن في الشكل. ينتج ...	$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{3}{5}$	$\frac{AM}{AB}=\frac{NM}{CB}=\frac{3}{5}$	$5\times NM=3\times CB$	106 و 107 و 109

أدمج تعلماتي

وضعية



الشكل المقابل يمثل أسطوانة دوران ارتفاعها h ونصف قطر قاعدتها r، مرسومة داخل مخروط دوران ارتفاعه 18cm ونصف قطر قاعدته 6cm.

احسب حجم هذه الأسطوانة في الحالة $h=r$.

تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: • ما المطلوب في النص؟ • أي شكل هندسي يمكن ربطه بالصورة المعطاة ؟
• ما هي الموارد المعرفية التي لها علاقة بهذه الوضعية؟

تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل مناسبة: • اختر أجزاء الصورة التي اعتمد عليها لانجاز الشكل المطلوب.
• اختر الخواص الهندسية المناسبة لحساب r.

تنفيذ استراتيجية الحل المختارة: • تفسير الشكل بمثلثين يشتركان في النقطة O.
• تطبيق خاصية طالس وحل معادلة لإيجاد r.

20 EBCF شبه منحرف قاعدته الصغرى [EF] نصف قاعدته الكبرى [BC] أي $EF = \frac{1}{2}BC$.

1) ارسم شكلا مناسبا.

2) يتقاطع قطراه [BF] و [EC] في النقطة G.

بيّن أن $\frac{GE}{GC} = \frac{GF}{GB} = \frac{1}{2}$.

3) يتقاطع (CF) و (BE) في النقطة A. بيّن أن F هي منتصف [CA]، وأن E هي منتصف [BA].

4) المستقيم (AG) يقطع [BC] في النقطة L.

بيّن أن L هي منتصف [BC].

(يمكن استعمال خاصية المتوسطات في مثلث).

21 أنشئ مثلثا EFG قائما في E حيث $EF = 4cm$ و $EG = 3cm$.

1) احسب $\mathcal{A}_1$ مساحة المثلث EFG.

2) أنشئ، دون استعمال مسطرة مدرّجة، النقطة L من نصف المستقيم [FE) حيث L لاتنتمي إلى [FE] و $\frac{EL}{EF} = \frac{2}{3}$، والنقطة P من نصف المستقيم [GE) حيث P لاتنتمي إلى [GE] و $\frac{EP}{EG} = \frac{2}{3}$، واستنتج $(GF) /\!/ (LP)$.

3) احسب القيمة المضبوطة لكل من الطول LP، وارتفاع المثلث ELP المتعلّق بالرأس E.

4) احسب القيمة المضبوطة لـ $\mathcal{A}_2$ مساحة المثلث ELP، ثم تحقق أنّ $\mathcal{A}_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \mathcal{A}_1$.

22 أراد عبد القادر تقدير عرض نهر، لهذا رسم مستقيمين متوازيين (AB) و (CD).

عن طريق البصر جعل على استقامية النقط O، B، D من ناحية والنقط O، A، C من الجانب الآخر.

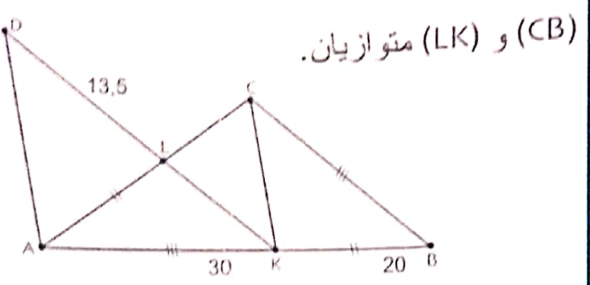
قاس عبد القادر الأطوال AB، CD، BD

فوجد $AB = 2m$، $CD = 5m$، $BD = 6m$.

احسب OB.

23 الأطوال في الشكل هي بالسنتيمتر وليست حقيقية.

(CB) و (LK) متوازيان.



هل (CK) يوازي (DA)؟

24 ABC و DBC مثلثان، O هي منتصف [BC].

J هي مركز ثقل المثلث ABC و K هي مركز ثقل المثلث DBC.

برهن أن (JK) يوازي (AD) ..

25 ABC مثلث كيفي. (AD) المتوسط المتعلّق بالضلع [BC].

M نقطة من [AD] تختلف عن A وعن D. المستقيم الذي يشمل M ويوازي (AC) يقطع [BC] في E، والمستقيم الذي يشمل M ويوازي (AB) يقطع [BC] في F.

1) ارسم شكلا مناسبا.

2) أثبت أنّ $\frac{DF}{DB} = \frac{DE}{DC}$، استنتج أنّ D هي منتصف [EF].

26 RST مثلثا كيفيا. منصف زاوية الرأس R يقطع الضلع [ST] في النقطة P.

المستقيم الذي يشمل T ويوازي (RP) يقطع (SR) في النقطة E.

1) ارسم شكلا مناسبا.

2) أثبت أنّ $\frac{SE}{SR} = \frac{ST}{SP}$، واستنتج $\frac{RE}{SR} = \frac{PT}{SP}$.

3) بيّن أنّ المثلث RTE متساوي الساقين.

4) بيّن أنّ $\frac{RT}{SR} = \frac{PT}{SP}$.

مبرهنة طالس

تمرين

أنجز الشكل المقابل. A' هي نظيرة A بالنسبة إلى B، B' هي نظيرة B بالنسبة إلى A'، A'' هي نظيرة A بالنسبة إلى C، C' هي نظيرة C بالنسبة إلى A''.

استعمل البرمجية جيوجيبرا لمقارنة $\frac{AB}{AB'}$ ، $\frac{AC}{AC'}$ ، $\frac{BC}{B'C'}$ و لمراقبة توازي المستقيمين (BC) و $(B'C')$.

حل

• انقر على و اختر Point ثم انقر على ورقة العمل فتظهر نقطة A.

أنشئ نقطتين B و C بنفس الكيفية.

• انقر على و اختر Symétrie centrale ثم انقر على A ثم على B فتظهر A' نظيرة A بالنسبة إلى B.

أنشئ بنفس الكيفية A'' نظيرة A بالنسبة إلى C.

• أنشئ B' نظيرة B بالنسبة إلى A' و C' نظيرة B بالنسبة إلى A''.

• أنشئ القطع $[AB']$،$[AC']$ ، $[B'C']$، $[BC]$.

• لإخفاء النقطة A' (ثم A'') اضغط عليها باليمنى و اختر Afficher l'objet في النافذة الظاهرة.

• انقر على و اختر Distance ou Longueur، انقر على A و على B فيظهر الطول AB.

قم بنفس العملية لإظهار الأطوال AB'، AC، AC'، BC،$B'C'$.

احجز أسفل ورقة العمل Saisie "AB/AB'="distanceAB/distanceAB'

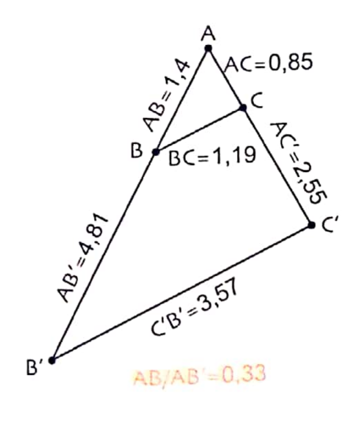
ثم اضغط على Enter فتظهر قيمة $\frac{AB}{AB'}$.

قم بنفس العملية لإظهار $\frac{AC}{AC'}$ و $\frac{BC}{B'C'}$.

حرك النقط A، B، C. ماذا تلاحظ؟

انقر على و اختر Relation

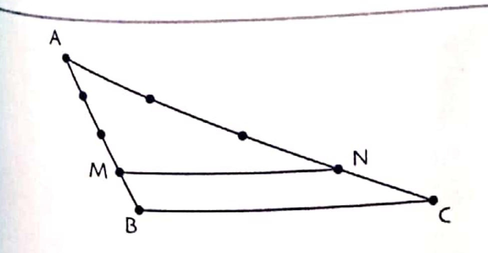
و انقر على (BC) و على $(B'C')$. ماذا تلاحظ؟



دوري الآن

في الشكل المقابل المثلث AMN هو تصغير للمثلث ABC.

استعمل البرمجية جيوجيبرا لإنجاز هذا الشكل و لتعيين معامل التصغير.



10 حساب المثلثات في المثلث القائم

سأتعلم في هذا الباب

- تعريف جيب وظل زاوية حادة في مثلث قائم.
- استعمال حاسبة لتعيين قيمة مقربة (أو القيمة المضبوطة) لكل من جيب زاوية حادة وظلها أو لتعيين قيس زاوية بمعرفة الجيب أو الظل.
- حساب زوايا أو أطوال بتوظيف الجيب أو الجيب تمام أو الظل.
- إنشاء زاوية هندسيا (بالمسطرة غير المدرّجة والمدور) بمعرفة القيمة المضبوطة لإحدى نسبها المثلثية.
- معرفة واستعمال العلاقتين: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ، $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

يُعتبر «نصير الدين الطوسي» و «أبو الوفاء» المؤسسين الحقيقيين لميدان حساب المثلثات، حيث سمحت نتائج بحوثهما بجعل هذا الميدان مادة تعليمية رياضياتية مستقلة.

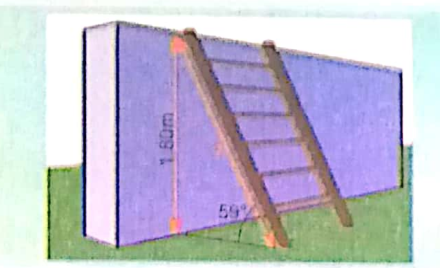
في أواخر القرون الوسطى، توصل هذان العالمان بصفة نهائية إلى إعطاء التسميات جيب«Sinus»، جيب التمام «Cosinus» والظل «Tangente» على المفاهيم المكتشفة. إن مفهوم الظل «Tangente» أدرج في الرياضيات من طرف الرياضياتي العربي حبش الحسيب.

إن هذا المفهوم يترجم بكيفية مباشرة بأن المستقيم الذي يسمح بقراءة ظل زاوية يكون مماسا لدائرة.

إن أهمية جداول قيم ظل زاوية متعلقة بارتفاعات كائنات ومعالم.

نصير الدين الطوسي

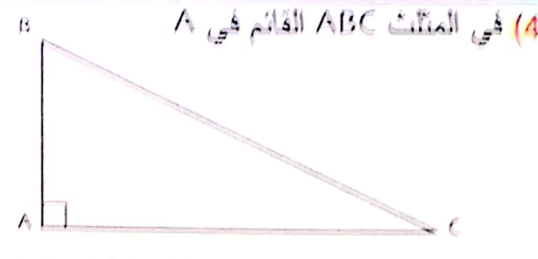
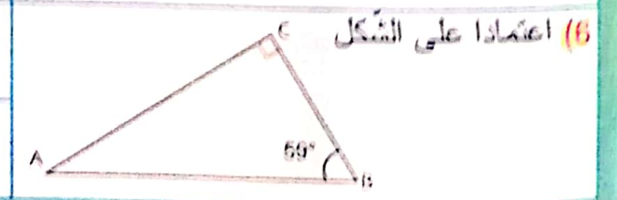
تحدّ



اعتمادا على الشكل، احسب قيمة مقرّبة إلى الجزء من 10 لطول السلّم.

أستعدّ

أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

1) مجموع أقياس زوايا مثلث يساوي $180°$.	
2) مدوّر العدد 1,267103 إلى الوحدة هو 1.	
3) مدوّر العدد 1,267103 إلى الجزء من 10 هو 1,2.	
4) في المثلث ABC القائم في A 	• الوتر هو $[BC]$.
	• الضلع المقابل للزاوية $\widehat{C}$ هو $[BC]$.
	• الضلع المجاور للزاوية $\widehat{C}$ هو $[AB]$.
5) في مثلث قائم جيب تمام زاوية حادّة يساوي.	$\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$
6) اعتمادا على الشكل 	$\widehat{BAC} = 31°$
	$\cos \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$

1 جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم

1) إليك الشكل المقابل.

لاحظ أن المثلث ABC قائم في A. ماهو وتره؟

عيّن قيس الزاوية $\widehat{B}$ (بالدرجات).

ماهو الضلع المجاور للزاوية $\widehat{C}$ ؟ ماهو الضلع المقابل لها؟



2) النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب تمام الزاوية $\widehat{C}$ ويرمز إليها $\cos\widehat{C}$.

انقل و أتمم: $\cos 25° = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

ماهي القيمة المضبوطة للعدد $\cos\widehat{B}$؟

باستعمال حاسبة، عيّن المدوّر إلى الجزء من 100 للعددين $\cos 75°$ و $\cos 25°$.

2 جيب زاوية حادة وظلها في مثلث قائم

1) أ) ارسم مثلثا ABC قائم في A حيث $\widehat{ABC} = 40°$.

ب) أنجز على الشكل القياسات اللازمة لحساب كل من $\frac{AC}{BC}$ و $\frac{AC}{AB}$.

جـ) قارن ما وجدته مع زملائك.

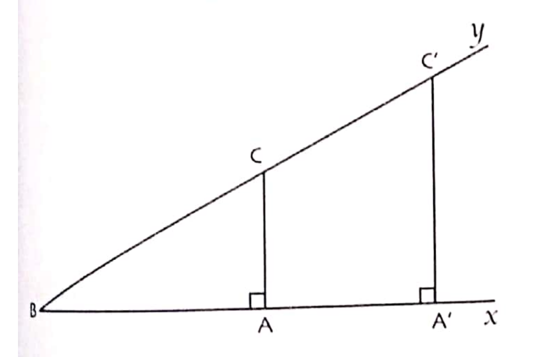
د) ماذا تلاحظ؟ ضع تخمينا اعتمادا على ملاحظتك.

2) من التخمين إلى البرهان. لاحظ الشكل المقابل.

1) برّر صحّة المساواتين: $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$ و $BC' \times AC = BC \times A'C'$ واستنتج أنّ $\frac{A'C'}{BC'} = \frac{AC}{BC}$

2) برّر المساواة $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BA}{BA'}$ ثمّ أثبت أنّ $\frac{A'C'}{A'B} = \frac{AC}{AB}$

هل النسبتان $\frac{AC}{BC}$ و $\frac{AC}{AB}$ تتعلقان بموقع النقطة A على نصف المستقيم $[Bx)$؟



النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب الزاوية $\widehat{B}$ ويرمز إليها $\sin\widehat{B}$.

النسبة $\frac{AC}{AB}$ تسمى ظل الزاوية $\widehat{B}$ ويرمز إليها $\tan\widehat{B}$.

3 في مثلث قائم

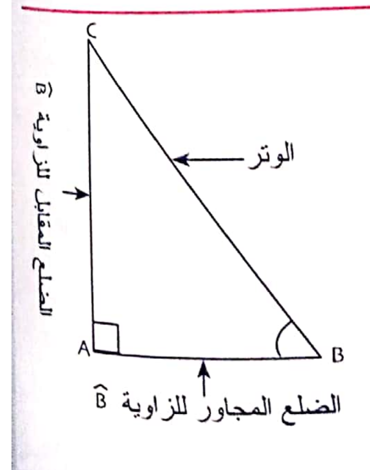
ABC مثلث قائم في A، $\widehat{B}$ زاوية حادة.

1) انقل مايلي وأتمم باستعمال العبارات: الضلع المقابل، الضلع المجاور، الوتر.

$\sin\widehat{B} = \frac{\dots}{\dots}$ ، $\tan\widehat{B} = \frac{\dots}{\dots}$

2) من أجل كل زاوية حادة $\widehat{B}$ ، اشرح لماذا:

$0 < \cos\widehat{B} < 1$ و $0 < \sin\widehat{B} < 1$



4 استعمال حاسبة في حساب نسب مثلثية

1) انقل و أتمم الجدول الآتي:

الزاوية	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$45°$	$60°$	$75°$	المدوّر إلى الجزء من 100
جيب تمام الزاوية								
جيب الزاوية								
ظل الزاوية								

2) استعمل حاسبة لإيجاد مدوّر x في كل حالة مما يلي:

	المدوّر إلى $\frac{1}{100}$	المدوّر إلى $\frac{1}{10}$	المدوّر x إلى الوحدة
$\sin x = 0,52$			
$\cos x = 0,25$			
$\tan x = 1,33$			

5 العلاقات المثلثية

1) أ) باستعمال الجدول الوارد في النشاط السابق، انقل ثمّ أتمم.

$(\cos 30°)^2 + (\sin 30°)^2 = ...$ و $\frac{\sin 30°}{\cos 30°} = ...$

$(\cos 45°)^2 + (\sin 45°)^2 = ...$ و $\frac{\sin 45°}{\cos 45°} = ...$

$(\cos 60°)^2 + (\sin 60°)^2 = ...$ و $\frac{\sin 60°}{\cos 60°} = ...$

ب) ضع تخمينا حول النتائج السابقة.

2) ABC مثلث قائم في A، ليكن x قيسا للزاوية $\widehat{B}$.

أ) عبّر عن $\cos x$، $\sin x$، $\tan x$ بدلالة أطوال أضلاع المثلث ABC.

ب) اكتب المساواة التي تعبّر عن خاصيّة فيتاغورس في هذا المثلث.

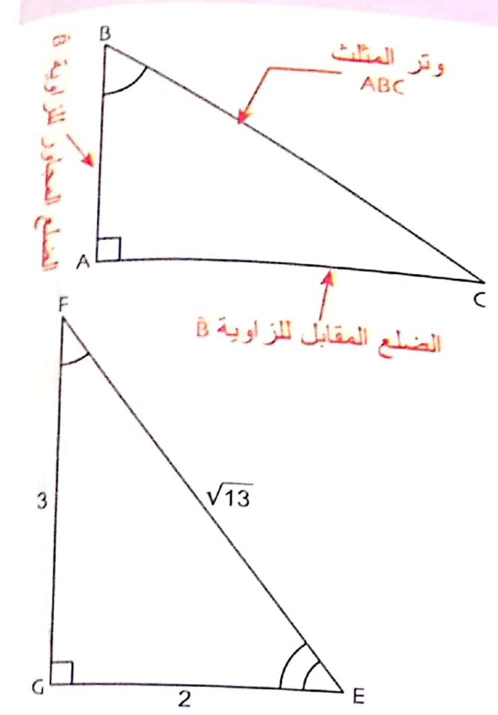
جـ) أثبت أنّ $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

د) أثبت أنّ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

1 جـيب زاوية حادة

تعريف

في مثلث قائم،
جيب زاوية حادة يساوي حاصل القسمة $\frac{\text{طول الضلع المقابل لهذه الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$.



ABC مثلث قائم في A، جيب الزاوية $\widehat{B}$ يساوي النسبة $\frac{AC}{BC}$.

يُرمز لهذه النسبة بالرمز $\sin\widehat{B}$ ونكتب $\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC}$.

تذكير: جيب تمام الزاوية $\widehat{B}$ يساوي النسبة $\frac{AB}{BC}$ يُرمز لهذه النسبة بالرمز $\cos\widehat{B}$ ويُقرأ جيب تمام الزاوية $\widehat{B}$. نكتب $\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC}$.

ملاحظة: الوتر هو أكبر ضلع في المثلث القائم.

بالتالي $\sin\widehat{B}$ و $\cos\widehat{B}$ هما عددان محصوران بين 0 و 1

مثال: في الشكل المقابل: لدينا $\sin\widehat{E} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ، $\cos\widehat{E} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ،

$\sin\widehat{F} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ، $\cos\widehat{F} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

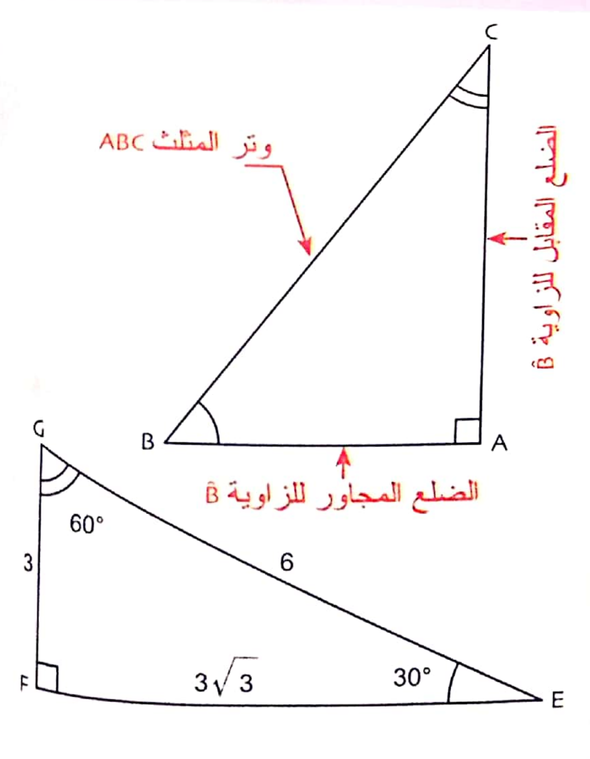
$\frac{3}{\sqrt{13}}$ هي القيمة المضبوطة للعدد $\sin\widehat{E}$

باستعمال حاسبة، نجد أن 0,83 هي قيمة مقربة إلى $\frac{1}{100}$ للعدد $\sin\widehat{E}$.

2 ظل زاوية حادة

تعريف

في مثلث قائم،
ظل زاوية حادة يساوي حاصل القسمة $\frac{\text{طول الضلع المقابل لهذه الزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور لهذه الزاوية}}$



مثال: ABC مثلث قائم في A، ظل الزاوية $\widehat{B}$ يساوي النسبة $\frac{AC}{AB}$.

يرمز لهذه النسبة بالرمز $\tan\widehat{B}$ ونكتب $\tan\widehat{B} = \frac{AC}{BC}$.

ملاحظة: ظل زاوية حادة في مثلث قائم هو عدد موجب.

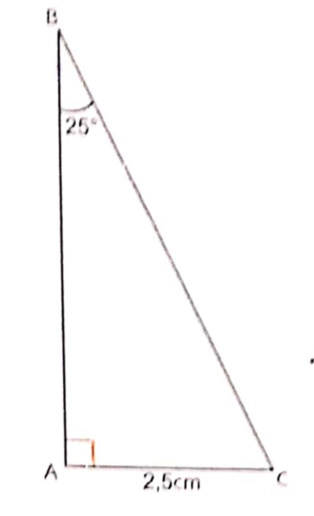
مثال: EFG مثلث قائم في F. لدينا $\tan\widehat{E} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ملاحظات: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ هي القيمة المضبوطة للعدد $\tan 30°$.

0,58 هي قيمة عشرية مقرّبة للعدد $\tan 30°$.

1,73 هي قيمة مقربة إلى الجزء من 100 للعدد $\tan 60°$.

• حساب طول ضلع مثلث قائم باستعمال الجيب



تمرين: ABC مثلث قائم في A حيث $AC = 2{,}5cm$ و $\widehat{B} = 25°$.
احسب BC. أعط المدوّر إلى الجزء من 100 للطول BC

حل: في المثلث ABC القائم في A، الضلع [BC] هو وتره
و [AC] هو الضلع المقابل للزاوية $\widehat{B}$. إذن $\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC}$
إذن $\sin25° = \frac{2{,}5}{BC}$ بالتالي $BC = \frac{2{,}5}{\sin25°}$
لحساب المدوّر إلى الجزء من 100 للطول BC، نستعمل حاسبة.
نبرمج هذه الآلة إلى وحدة الدرجة ثم ننفذ البرنامج الآتي: (من اليسار إلى اليمين).
25 | sin | ÷ | 2,5 | ON يظهر على الشاشة 5,915 503 958
المدوّر إلى الجزء من 100 للطول BC هو 5,92. نكتب $BC \simeq 5{,}92cm$

طريقة

لحساب طول ضلع في مثلث قائم يمكن استعمال النسبة المثلثية sin.

• حساب طول ضلع في مثلث قائم باستعمال جيب تمام

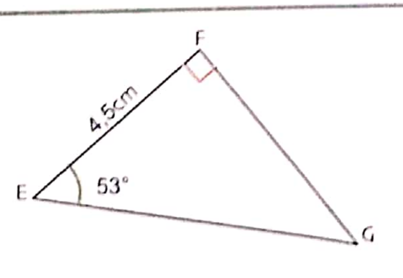
تمرين: RST مثلث قائم في S حيث $RT = 3{,}5cm$ و $\widehat{R} = 37°$ احسب RS.
أعط المدوّر إلى الجزء من 10 للطول RS.

حل: في المثلث RST القائم في S، الضلع [RT] هو وتره
و [RS] هو الضلع المجاور للزاوية $\widehat{R}$. إذن $\cos\widehat{R} = \frac{RS}{RT}$
إذن $\cos37° = \frac{RS}{3{,}5}$ بالتالي $RS = 3{,}5 \times \cos37°$.
لحساب المدوّر إلى الجزء من 10 للطول RS، ننفذ البرنامج الآتي (من اليسار إلى اليمين).
37 | cos | × | 3,5 | ON يظهر على الشاشة 2,795 224 285
المدوّر إلى الجزء من 10 للطول RS هو 2,8. نكتب $RS \simeq 2{,}8cm$.

طريقة

لحساب طول ضلع في مثلث قائم يمكن استعمال النسبة المثلثية cos.

• حساب طول ضلع مثلث قائم باستعمال الظل



تمرين: EFG مثلث قائم في F حيث $EF = 4{,}5cm$ و $\widehat{E} = 53°$
احسب FG. أعط المدور إلى الجزء من 100 للطول FG.

حل: في المثلث EFG القائم في F، الضلع [EF] هو الضلع المجاور
للزاوية $\widehat{E}$ و [FG] هو الضلع المقابل لها.
إذن $\tan\widehat{E} = \frac{FG}{EF}$ أي $\tan53° = \frac{FG}{4{,}5}$ بالتالي $FG = 4{,}5 \times \tan53°$
لحساب المدوّر إلى الجزء من 100 للطول FG، ننفذ البرنامج المقابل (من اليسار إلى اليمين)
53 | tan | × | 4,5 | ON يظهر على الشاشة 5,971 701 697
المدوّر إلى الجزء من 100 للطول FG هو 5,97. نكتب $FG \simeq 5{,}97cm$

دورك الآن

1. KLM مثلث قائم في L ومتقايس الساقين حيث $KM = 6cm$ احسب LM بطريقتين.
أعط المدوّر إلى الجزء من 10 للطول LM.

2. PQR مثلث قائم في Q حيث $QR = 2{,}8cm$ و $\widehat{P} = 72°$. احسب PQ.
أعط المدوّر إلى الجزء من 10 للطول PQ.

3 استعمال حاسبة في حساب نسب مثلثية

قبل استعمال الحاسبة، يجب برمجتها بالوحدة الدرجة ($d°$).

مثال 1: حساب المدوّر إلى $\frac{1}{100}$ لكل من النسب $\sin 54°$ ، $\cos 54°$ ، $\tan 54°$

• نحسب $\sin 54°$ باتباع المراحل الآتية: (من اليسار إلى اليمين) ON sin 54 =

يظهر على الشاشة 0,8 090 169 944

المدوّر إلى $\frac{1}{100}$ للعدد $\sin 54°$ هو 0,81

• نحسب $\cos 54°$ باتباع المراحل الآتية: (من اليسار إلى اليمين) ON cos 54 =

يظهر على الشاشة 0,5 877 852 523

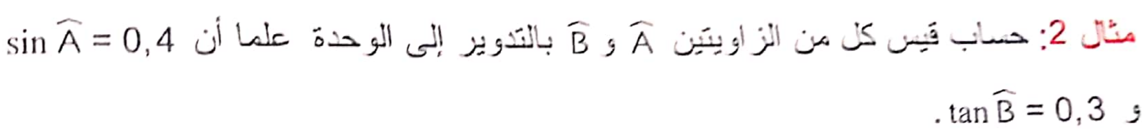
المدوّر إلى $\frac{1}{100}$ للعدد $\cos 54°$ هو 0,59

• نحسب $\tan 54°$ باتباع المراحل الآتية: (من اليسار إلى اليمين)

ON tan 54 =

يظهر على الشاشة 1,37 638 192

المدوّر إلى $\frac{1}{100}$ للعدد $\tan 54°$ هو 1,38



مثال 2: حساب قيس كل من الزاويتين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ بالتدوير إلى الوحدة علما أن $\sin \widehat{A} = 0,4$ و $\tan \widehat{B} = 0,3$.

• نحسب $\widehat{A}$ حيث $\sin \widehat{A} = 0,4$ باتباع المراحل الآتية: (من اليسار إلى اليمين)

ON 2^{nd} $\sin^{-1}$ 0,4 =

يظهر على الشاشة الحاسبة 23,57817848 إذن $\widehat{A} \simeq 24°$.

• نحسب $\widehat{B}$ حيث $\tan \widehat{B} = 0,3$ باتباع المراحل الآتية: (من اليسار إلى اليمين)

ON 2^{nd} $\tan^{-1}$ 0,3 =

يظهر على الشاشة الحاسبة 16,69924453 إذن $\widehat{B} \simeq 17°$.

4 العلاقات المثلثية

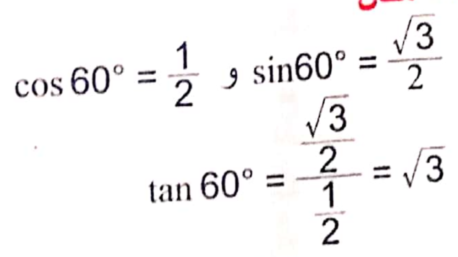
من أجل كل x زاوية حادّة في مثلث قائم فإنّ:

1) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 2) $\sin^2 x + \sin^2 x = 1$

ملاحظة : الكتابة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

تعني $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$


مثال



$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$(\cos 60°)^2 + (\sin 60°)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

• استعمال العلاقات المثلثية

تمرين: x هو قيس زاوية حادة حيث $\cos x = 0,6$.

احسب القيمة المضبوطة للعدد $\sin x$.

استنتج عندئذ القيمة المضبوطة للعدد $\tan x$. أعط المدوّر إلى الجزء من 100 للعدد $\tan x$.

حل: • نعلم أن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

إذن $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. لكن $\cos x = 0,6$. بالتالي $\sin^2 x = 1 - 0,36$ أي $\sin^2 x = (0,8)^2$.

إذن $\sin x = 0,8$ ($\sin x$ عدد موجب).

لدينا $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. إذن $\tan x = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}$ أي $\tan x = \frac{4}{3}$.

لدينا $\frac{4}{3} \simeq 1,33333......$ إذن المدوّر إلى الجزء من 100 للعدد $\tan x$ هو 1,33.

• إنشاء هندسي لزاوية حادة علمت القيمة المضبوطة لإحدى نسبها المثلثية

تمرين 1: أنشئ، بدون استعمال منقلة زاوية قيسها x حيث $\sin x = \frac{2}{5}$.

تحقق بحاسبة ثم بمنقلة.

حل: نعتبر وحدة الطول (السنتيمتر مثلا).

ننشئ زاوية قائمة $\widehat{AOB}$ رأسها O.

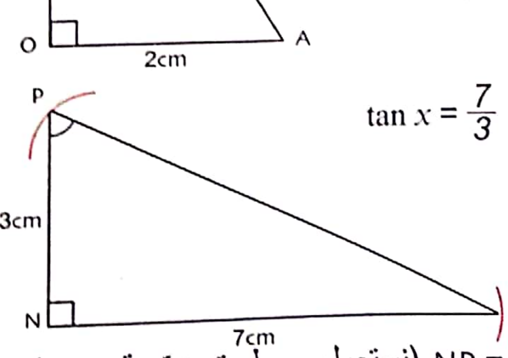
نعيّن على أحد ضلعيها النقطة A حيث OA = 2cm. نرسم الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 5cm تقطع هذه الدائرة الضلع الثاني لهذه الزاوية في النقطة B.

في المثلث AOB القائم في O، لدينا: $\frac{2}{5} = \frac{OA}{AB} = \sin\widehat{B}$. إذن $\widehat{B} = x$.

عند التحقق بحاسبة نجد $\widehat{B} \simeq 23,6°$، وبالمنقلة نجد $\widehat{B} = 24°$.

تمرين 2: أنشئ، بدون استعمال منقلة الزاوية التي قيسها x حيث $\tan x = \frac{7}{3}$

تحقق بحاسبة ثم بمنقلة.



حل: نضع وحدة الطول هي 1cm.

ننشئ زاوية قائمة $\widehat{MNP}$ رأسها N.

نعيّن على الضلعين النقطتين M و P حيث MN = 7cm و NP = 3cm (نستعمل مسطرة مدرّجة مِدور)

في المثلث MNP القائم في N، لدينا: $\frac{7}{3} = \frac{NM}{NP} = \tan\widehat{P}$. إذن $\widehat{P} = x$.

عند التحقق بحاسبة نجد $\widehat{P} \simeq 66,8°$، وبالمنقلة نجد $\widehat{P} = 67°$



❶ x هو قيس زاوية حادة حيث $\sin x = 0,4$.

احسب القيمة المضبوطة للعدد $\cos x$.

أعط المدوّر إلى الجزء من 100 للعدد $\cos x$.

استنتج المدوّر إلى الجزء من 100 للعدد $\tan x$.

❷ أنشئ، بدون استعمال منقلة، الزاوية التي قيسها x حيث $\cos x = \frac{3}{4}$.

تحقق بحاسبة ثم بمنقلة.

النسب المثلثية - استعمال حاسبة

1 JKL مثلث حيث $JK = 7,8cm$ ، $JL = 10,4cm$ ، $KL = 13cm$.

1) برهن أن المثلث JKL قائم في J.

2) احسب $\tan \widehat{K}$ ، $\tan \widehat{L}$.

2 نفس الأسئلة بالنسبة للمثلث ABC حيث $BC = 17,5cm$ ، $AC = 14cm$ ، $AB = 10,5cm$.

3 1) أنشئ مثلثا قائما حيث قيس إحدى الزاويتين الحادتين هو $40°$.

اذكر الوسائل التي تستعملها لإنجاز الشكل.

2) بتدوير النتائج إلى الجزء من 100،

احسب $\tan 40°$ ، $\cos 40°$ ، $\sin 40°$

أ) باستعمال أقياس أطوال أضلاع المثلث.

ب) باستعمال حاسبة.

جـ) قارن النتائج المتحصّل عليها، ماذا تستنتج؟

4 ABC مثلث حيث $AB = 3,7dm$ ، $AC = 3,5dm$ ، $BC = 1,2dm$.

1) أثبت أن المثلث ABC قائم.

2) احسب كلا من $\cos \widehat{A}$ ، $\sin \widehat{A}$ ، $\tan \widehat{A}$.

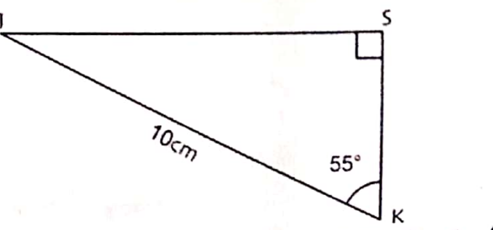
5 المثلث KBC الآتي قائم في B حيث $KB = 14cm$ و $BC = 17cm$

1) احسب $\tan \widehat{CKB}$.

2) احسب $\sin \widehat{CKB}$ ، $\cos \widehat{CKB}$.

تعطى القيمة المضبوطة ثم المدوّر إلى الجزء من 100.

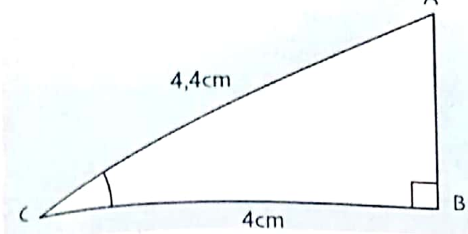
6 JSK مثلث قائم في S حيث $JK = 10cm$ (الشكل)



1) عيّن القيمة المضبوطة للطول SK.

2) احسب المدوّر إلى الجزء من 100 للطول SK.

7 في الشكل الآتي، احسب القيمة المقربة إلى الوحدة من الدرجة لـ $\widehat{ACB}$ (اكتب البرنامج الذي تنفذه بالحاسبة).



8 FDE مثلث قائم في D. (الشكل)

1) احسب DE.

2) احسب القيمة المقربة إلى الوحدة لقيس الزاوية $\widehat{FED}$.

9 ABC مثلث قائم في A حيث $BC = 5,2cm$ و $\widehat{ABC} = 23°$.

احسب المدوّر إلى $\frac{1}{10}$ للطول AC.

10 أنْهت نبيلة حل التمرين الذي اقترحه عليها أستاذ الرياضيات وكتبت $\cos \widehat{A} = 1,5$.

غير أن زميلتها مريم بيّنت لها خطأ نتيجتها دون إجراءها لأي حساب. ما رأيك أنت؟ اشرح.

11 TRI هو مثلث قائم في I حيث $IT = 2cm$ و $IR = 5cm$.

1) أنجز شكلا باليد الحرة.

2) احسب قيس الزاوية $\widehat{R}$. تدوّر النتيجة إلى الجزء من 10.

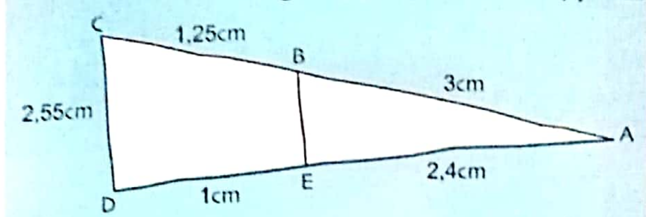
البرهان باستعمال النسب المثلثية

12 ABC مثلث حيث $AB = 3cm$ ، $AC = 4cm$ و $BC = 5cm$.

1) أثبت أن المثلث ABC قائم في A.

2) احسب $\cos \widehat{B}$ ، $\sin \widehat{B}$ ، $\tan \widehat{B}$ ، $\cos \widehat{C}$ ، $\sin \widehat{C}$ ، $\tan \widehat{C}$.

13 إليك شكلا أنجز باليد الحرة.



برهن أن (BE) عمودي على (AD).

احسب المدوّر إلى الدرجة لقيس الزاوية $\widehat{A}$.

14 لاحظ الشكل المقابل

1) برهن أن $\frac{AB}{OB} = \frac{EF}{OE}$.

2) برهن أن $\frac{AB}{OA} = \frac{EF}{OF}$.

15 طلب أستاذ الرياضيات من ثلاثة تلاميذ: عمر، ليلى ومختارية الاختيار بين جيب تمام أو الجيب أو الظل لحساب قيس الزاوية $\widehat{A}$.

عمر: جيب تمام

ليلى: الجيب

رضا: الظل

من الذي أحسن الاختيار؟ اشرح.

العلاقات المثلثية

16 x هو قيس زاوية حادة حيث $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

احسب، بدون استعمال حاسبة، القيمة المضبوطة للعدد $\sin x$.

استنتج القيمة المضبوطة للعدد $\tan x$.

17 x هو قيس زاوية حادة حيث $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) بدون استعمال حاسبة، عيّن القيمة المضبوطة للعدد $\cos x$

2) استنتج قيمة مقربة للعدد $\tan x$ تدوّر النتيجة إلى الجزء من 100.

18 x قيس بالدرجات لزاوية حادّة.

بدون حساب قيمة x، أتمم إن أمكن الجدول الآتي.

$\cos x$	0,4	....	....
$\sin x$	....	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
$\tan x$	....	....	....

19 ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 1، [AH] الارتفاع المتعلّق بالضلع [BC].

1) أنجز شكلا مناسبا.

2) برّر صحّة المساواة $\cos 60° = \frac{1}{2}$ واستنتج أنّ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\tan 60° = \sqrt{3}$.

3) ماهو قيس الزاوية $\widehat{BAH}$؟ برّر صحّة المساواة $\sin 30° = \frac{1}{2}$ واستنتج أنّ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

إنشاءات هندسية

20 أنشئ بدون استعمال منقلة، زاوية بحيث جيبها التمام يساوي 0,18.

عيّن قيس هذه الزاوية. (بالحاسبة وبالمنقلة).

تدوّر النتيجة إلى الدرجة.

21 أنشئ، بدون استعمال منقلة، زاوية ظلها يساوي 5,4.

تحقق بالحاسبة وبالمنقلة.

22 أنشئ، بدون استعمال منقلة، زاوية قيسها x يحقق $\sin x = \frac{3}{5}$. أعط المدوّر إلى الجزء من 10 لهذا القيس.

تحقق باستعمال حاسبة ثم بمنقلة.

23 طلب أستاذ الرياضيات من تلاميذه حساب قيمة مقربة إلى الوحدة للزاوية $\widehat{KML}$ اعتمادًا على الشكل الآتي:

رضا	ليلى
KLM قائم في K.	$\cos \widehat{KML} = \frac{MK}{ML}$
$\tan \widehat{KML} = \frac{MK}{ML}$	$\cos \widehat{KML} = \frac{5}{9}$
$\tan \widehat{KML} = \frac{5}{9}$	$\widehat{KML} = 0,6$
$\widehat{KML} = 29$	

صوّب الأخطاء المُرتكبة في الإجابتين مع الشرح.

أؤكد تعلماتي

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة	الإجابات (1)	(2)	(3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	في المثلث MOB القائم في O، لدينا:	$\cos\widehat{M}=\frac{OM}{OB}$	$\cos\widehat{M}=\frac{OM}{MB}$	$\cos\widehat{M}=\frac{OB}{MB}$	118 و 119
2	في المثلث LMN القائم في M، لدينا:	$\sin\widehat{L}=\frac{MN}{LN}$	$\sin\widehat{L}=\frac{LM}{LN}$	$\sin\widehat{L}=\frac{MN}{LM}$	118 و 119
3	في المثلث ABC القائم في B، لدينا:	$\sin 35°=\frac{7}{AC}$	$\sin 35°=\frac{AC}{7}$	$\sin 35°\times AC=7$	118 و 119
4	إذا كان $\frac{2}{MN}=\cos 70°$ فإن...	$MN=2\times\cos70°$	$MN=\frac{\cos70°}{2}$	$MN=\frac{2}{\cos70°}$	118 و 119
5	في الشكل المقابل، لدينا:	$IE=\frac{6}{\tan 50°}$ $EL=6\times\sin50°$	$IE=6\times\tan50°$ $EL=\frac{6}{\cos 50°}$	$IE=6\times\sin50°$ $EL=6\times\sin50°$	118 و 119
6	من أجل كل قيس زاوية حادة في مثلث قائم، لدينا:	$\cos^2x=\sin^2x-1$	$\cos^2x=1-\sin^2x$	$\cos x=1-\sin x$	120 و 121

أدمج تعلماتي

وضعية

يريد أريس قياس ارتفاع المعلم التاريخي «مقام الشهيد» المتواجد بالجزائر العاصمة.

لإنجاز هذه المهمة، استعان بعمود كهربائي طوله 2,30m ووقف في مكان حيث يشاهد قمة العمود الكهربائي وقمة «مقام الشهيد».

ساعد أريس على إيجاد ارتفاع هذا المقام.

عيّن قيس الزاوية x المحدّدة على الشكل.

(يعطى المدوّر إلى الدرجة للزاوية x)

2,30m
96,55m
2,45m
x

تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: المطلوب البحث عن ارتفاع مقام الشهيد وقيس الزاوية x، الأخذ بعين الاعتبار الشكل والأبعاد المُعطاة.

تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل مناسبة: ماهي المعارف الرياضية التي قد تكون لها علاقة بالشكل؟

(خاصيّة طالس، النسب المثلثية في مثلث قائم ، خاصيّة فيتاغورس،.....).

اختيار المعرفة المناسبة تبعا للمعطيات.

تنفيذ استراتيجية الحل: • كتابة المساويات اللازمة وحساب الارتفاع.

• توظيف الارتفاع والمعارف المناسبة لحساب القيس x.

24 ارسم دائرة مركزها O ونصف قطرها 2,5cm.
ارسم قطرا [AB].
ضع نقطة C على الدائرة بحيث تبعد عن A بمسافة 3cm.
1) ماهو نوع المثلث ABC؟ علّل إجابتك.
2) احسب أقياس زوايا المثلث ABC.

25 ABCD مستطيل، طولا قطريه 10cm.
يتقاطع القطران في النقطة O (الشكل).

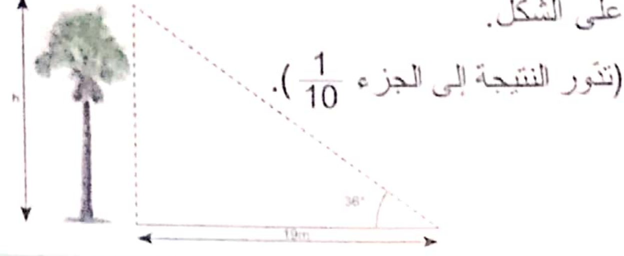
1) احسب قيس الزاوية $\widehat{OAB}$.
2) احسب طول وعرض المستطيل ABCD.

26 ABC مثلث قائم في A حيث $\widehat{B} = 18°$ و BC = 6cm.
1) أنجز شكلا مناسبا.
احسب AC.
تدوّر النتيجة إلى الجزء من 10.
2) احسب AB في كل حالة مما يلي:
- إستعمال $\cos\widehat{B}$.
- استعمال خاصية فيثاغورس.
- استعمال $\tan\widehat{B}$.
- استعمال $\sin\widehat{C}$.

27 MSF مثلث قائم في M حيث $\widehat{S}=32°$ و MF=9cm
1) احسب MS (تدور النتيجة إلى الجزء من 100).
2) احسب SF في كل حالة مما يلي:
(تدوّر النتيجة إلى الجزء من 10).
- بحساب $\sin\widehat{S}$.
- باستعمال خاصية فيثاغورث.
- باستعمال $\cos\widehat{S}$.
- باستعمال $\cos\widehat{F}$.

28 ABCD متوازي أضلاع حيث CD = 4,5cm و BC = 2,7cm.
[AH] الارتفاع المتعلّق بالضلع [CD].
مساحة ABCD هي $10,35cm^2$.
1) أنجز شكلا باليد الحرة.
2) احسب الارتفاع AH.
3) استنتج قيسي الزاويتين $\widehat{ADC}$ و $\widehat{BCD}$
(تدوّر النتيجتان إلى الوحدة).

29 احسب ارتفاع النخلة باستعمال المعطيات المسجلة على الشكل.
(تدور النتيجة إلى الجزء $\frac{1}{10}$).



30 ABCD مربع طول ضلعه 1.
1) برّر صحة المساواة $AC=\sqrt{2}$
2) استنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos 45°$، $\sin 45°$، $\tan 45°$.

31 ABCDEFGH متوازي مستطيلات
1) احسب القيمتين المضبوطتين لكل من AC و AD.
أعط المدوّر إلى الوحدة لكل من AC و AD.
2) عيّن القيمة المضبوطة للعدد $\sin\widehat{DAC}$.
احسب المدوّر إلى الدرجة لقيس الزاوية $\widehat{DAC}$.

32 هرم «خوفو» هو هرم منتظم قاعدته مربع طول ضلعه 231m.
رأسه متواجد على المستقيم العمودي على قاعدة الهرم في مركزها. يبعد هذا الرأس بنفس المسافة 220m عن رؤوس القاعدة.
احسب طول ارتفاع هذا الهرم. تدوّر النتيجة إلى الوحدة.

استعمال حاسبة علمية

تعيين قيمة مقربة (أو القيمة المضبوطة) لـ جيب و ظل زاوية حادة

• احسب $\sin 35°$ كما يلي:

أ) اجعل الحاسبة في الوضع «Degres» بالضغط على اللمسة 

أو باستعمال اللمسة أو حسب نوع الحاسبة.

ب) انقر على الأزرار المقابلة بدءا من اليسار: sin 5 3

• احسب قيم مقربة لـ $\sin 60°$ ، $\cos 70°$، $\tan 30°$.

تعيين قيس زاوية بمعرفة الجيب أو الظل

• عيّن زاوية جيبها 0,5 كما يلي:

أ) اجعل الحاسبة في الوضع «Degres»

ب) انقر على الأزرار المقابلة بدءا من اليسار: 

ملاحظة: في بعض الحاسبات نجد INV أو 2nd بدل SHIFT.

• انقل و أتمم ما يلي:

$\cos \widehat{A} = 0,5$ إذن $\widehat{A} = ...$ ، $\sin \widehat{B} = 0,73$ إذن $\widehat{B} = ...$ ، $\tan \widehat{C} = 0,45$ إذن $\widehat{C} = ...$.

استعمال المجدول إكسال

علاقات بين النسب المثلثية

• افتح ورقة إكسال و احجز ما يلي:

	A	B	C	D	E	F
1	A الزاوية	sinA	cosA	tanA	sinA/cosA	(sinA)²+(cosA)²
2	20					
3	30					
4	40					
5	50					
6	60					

• احجز في الخلية B2 الدّستور =sin(Radians(A2)) ثم اضغط على Enter

• احجز في الخلية C2 الدّستور =cos(Radians(A2)) ثم اضغط على Enter

• احجزفي الخلية D2 الدّستور =tan(Radians(A2)) ثم اضغط على Enter

• احجز في الخلية E2 الدّستور =B2/C2 ثم اضغط على Enter

• احجز في الخلية F2 الدّستور =B2^2 + C2^2 ثم اضغط على Enter

• حدد الخلايا من A2 إلى F2 ثم اسحب بالفأرة حتى الخلية F6. ماذا تلاحظ؟ اشرح.

دوري الآن

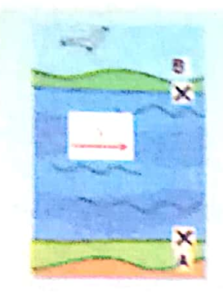
ABC مثلث قائم في A و BC = 5. استعمل المجدول إكسال لإتمام الجدول التالي:

$\widehat{ABC}$						
AB						
AC						

11 الأشعة والانسحاب

سأتعلم في هذا الباب

- تعريف شعاع انطلاقا من الانسحاب.
- معرفة شروط تساوي شعاعين و استعمالها.
- معرفة علاقة شال و استعمالها لإنشاء مجموع شعاعين أو لإنشاء شعاع يحقق علاقة شعاعية معينة أو لإنجاز براهين بسيطة.


ميشال شال (1793-1880)

إن استعمال مفهوم الشعاع حديث العهد.
لقد استعمل الرياضياتي فيستوبيلا فيتيس ما سماه «القطع المتسايرة» في سنة 1832، وفي إحدى مؤلفاته عرض طريقة التساير لأول مرة.
بعد هذه الفترة، تغير اسم هذه الطريقة ليصبح تحت العنوان «الأشعة المتسايرة». أما الرمز $\overrightarrow{AB}$ لتمثيل شعاع معين بنقطتين A و B فقد بدأ استعماله في البرامج التعليمية في بداية القرن العشرين. فيما يخص ميشال شال، لقد اهتم بدوره بإبراز الأهمية التي تتضمنها التحويلات الهندسية المحافظة لبعض الخواص مثل الاستقامية، التوازي... إنه يعتبر أحد الباحثين الذين قدموا نتائج هامة في ميدان الحساب الشعاعي. ورغم أنه لم يكتب بصفة صريحة العلاقة الشعاعية، فقد نسبت إليه وحملت اسمه إلى يومنا هذا: «علاقة شال» و هي $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

تحدٍّ

انطلق سبّاح محترف من الموقع A وهو يريد الوصول إلى الموقع B من النهر.
المسار [AB] عمودي على حافتي هذا النهر (الشكل).
في تلك اللحظة، و للأسف، اشتد تيار الماء في النهر حيث بلغت سرعته 2km/h.
إذا علمت أن سرعة السبّاح هي 4km/h، ففي أي اتجاه ينبغي عليه السباحة حتى يصل إلى النقطة B؟

أستعد

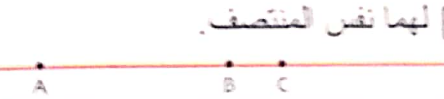
أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

1) الرباعي ABCD متوازي أضلاع يعني قطراه [AC] و [BD] لهما نفس المنتصف.

2) في رباعي ABCD، لدينا (AB) و (CD) متوازيان. إذن ABCD متوازي أضلاع.

3) الرباعي ABCD الآتي متوازي أضلاع.
إذن المثلثان ABC و ADC
متناظران بالنسبة إلى النقطة O.

4) في الشكل أدناه، النقط A ، B ، C ، D تقع على استقامة واحدة و AC = BD. إذن القطعتان [AD] و [BC] لهما نفس المنتصف.

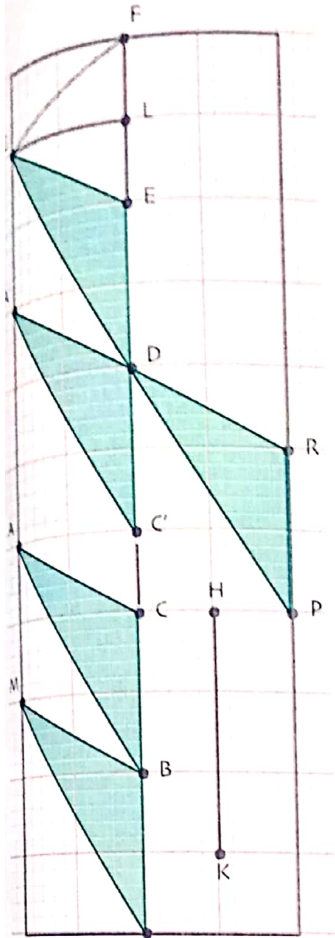


5) ABCD متوازي أضلاع.
إذن C هي صورة D بالإنسحاب الذي يحول A إلى B.

6) A ، B ، C ، D نقط حيث D هي صورة C بالإنسحاب الذي يحول B إلى A.
إذن القطعتان [AB] و [CD] متقايستان.

7) MNPQ متوازي أضلاع، I نقطة تقاطع قطريه [MP] و [NQ]. إذن
M هي نظيرة P بالنسبة إلى I.
N هي نظيرة Q بالنسبة إلى (MP).

1 الانسحاب ومفهوم الشعـاع



لاحظ الشكل.

1) أ) عيّن في كل حالة مما يلي صورة المثلث ABC بواسط الانسحاب الذي يحوّل:

• A إلى G ، • C إلى R ، • A إلى M.

ب) المستقيمان (AG) و (CE) متوازيان، نقول إنّ لهما نفس المنحى.

• تحقّق أن للمستقيمات: (AG) ، (CE) ، (KH) و (AM) نفس المنحى.

جـ) قارن اتجاهات أنصاف المستقيمات [AG) ، [CE) ، [KH) و [AM).

د) قارن بين الطولين AG و CE ثم بين AG و KH.

2) أ) عيّن في كل حالة مما يلي صورة المثلث ABC بالانسحاب الذي يحوّل:

• A إلى A′ ، • C إلى D ، • K إلى H.

ب) اشرح لماذا الانسحاب الذي يحوّل A إلى A′

هو نفسه الانسحاب الذي يحوّل C إلى D

و هو أيضا الانسحاب الذي يحوّل K إلى H.

جـ) هل يُمكن إيجاد انسحاب آخر بحيث تكون صورة المثلث ABC

بهذا الانسحاب هي نفسها بالانسحاب الذي يحوّل K إلى H.

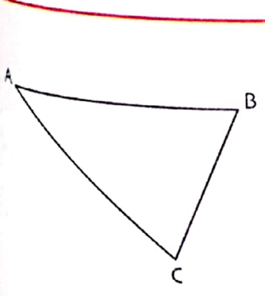
• نقول إنّ الثنائيات (A ; A′) ، (C ; D) ، (K ; H) ، ... المتكونة من نقطة و صورتها بهذا الانسحاب تُعرّف **شعاعا** $\vec{u}$ يُرمز إليه بـ $\overrightarrow{AA'}$ أو بـ $\overrightarrow{BB'}$ أو بـ $\overrightarrow{CC'}$ ونكتب ... $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{KH} = \dots$.

كُل من $\overrightarrow{AA'}$ (أو $\overrightarrow{CD}$ أو $\overrightarrow{KH}$ ...) هو **مُمثّل** للشعاع $\vec{u}$.

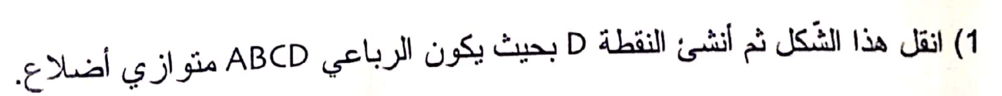
د) هل $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GL}$ ؟ هل $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{RP}$ ؟ لماذا؟

هـ) عيّن ممثلين للشعاع $\overrightarrow{NM}$.

2 تساوي شعاعين



أ) لاحظ الشّكل المقابل حيث ABC مثلث كيفي.



1) انقل هذا الشّكل ثم أنشئ النقطة D بحيث يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

2) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$. واستنتج العلاقة بينهما.

اذكر شعاعين آخرين متساويين في الشكل.

A، B، C، D، O نقط من المستقيم (d). (الشّكل).

1) تحقق أن للقطعتين [BC] و [AD] نفس المنتصف O.

استنتج العلاقة بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$؟

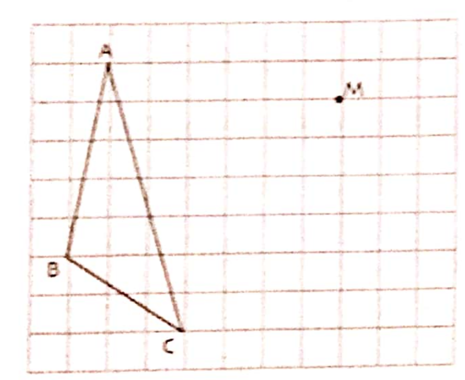
2) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DB}$.

3 مجموع شعاعين

1) انقل الشكل المقابل على ورقة مرصوفة حيث ABC مثلث و M نقطة من المستوي.

2) أنشئ النقطة 'M صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

3) عيّن النقطة "M صورة 'M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$.



4) ما هي طبيعة كل من الرباعيين AMM'B و BM'M"C؟

5) برهن أن الرباعي ACM"M متوازي أضلاع.

ما هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$؟

6) بتطبيق الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ متبوع بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$؛

ما هو الانسحاب الذي نتحصل عليه؟

الانسحاب الذي وجدته يسمح لنا بكتابة المساواة: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

هذه المساواة تسمى علاقة «شال».

7) انقل وأتمم: «مجموع الشعاعين ... و ... يساوي الشعاع ...»

4 إنشاء ممثل لمجموع شعاعين

A، B، C ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة. (الشّكل)

1) أنشئ ممثلا للشعاع $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

2) أنشئ النقطة D بحيث الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

3) أنشئ ممثلا للشعاع $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

4) عيّن ممثلا للشعاع $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ ثم للشعاع $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$.

نقول أن كلا من الشعاعين $\overrightarrow{AA}$ و $\overrightarrow{BB}$ هو الشعاع المعدوم ونرمز له بالرمز $\vec{0}$.

5) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$.

نقول عن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ أنهما متعاكسان ونكتب $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

1 الانسحاب ومفهوم الشعاع

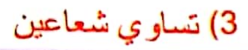
1) المنحى والاتجاه



عندما يكون مستقيمان متوازيين، نقول إنّ لهذين المستقيمين نفس المنحى.

للمستقيمين (d) و (d') نفس المنحى معناه (d) // (d').

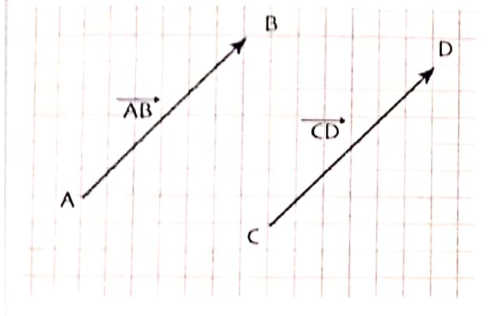
النقطتان المتمايزتان A و B تعيّنان على المستقيم (AB)، اتجاهين أحدهما من A نحو B والآخر من B نحو A.



الاتجاه من B نحو A   الاتجاه من A نحو B

2) الانسحاب ومفهوم الشعاع

A و B نقطتان متمايزتان. الانسحاب الذي يحوّل A إلى B يحوّل أيضا C إلى D، E إلى F و M إلى N.



كل من الثنائيات (M ; N)، (C ; D)، (E ; F)، (A ; B)،

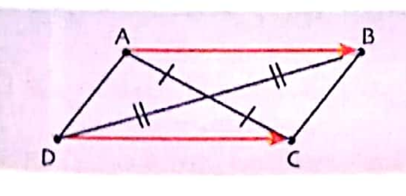
تعرّف نفس الشعاع $\vec{u}$ الذي:

- منحاه هو منحى المستقيم (AB).
- اتجاهه هو من A نحو B.
- طويلته هي طول القطعة [AB].

يمكن أن نرمز لهذا الشعاع بالرمز $\overrightarrow{AB}$ (مبدؤه A ونهايته B) أو $\overrightarrow{CD}$ أو $\overrightarrow{EF}$ أو $\overrightarrow{MN}$.

نقول إنّ كل من $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$، $\overrightarrow{EF}$، $\overrightarrow{MN}$، ... هو مُمثّل للشعاع $\vec{u}$.

3) تساوي شعاعين



القول عن شعاعين أنّهما متساويان يعني أنّ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه ونفس الطول.

مثال: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ معناه:

- للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$: نفس المنحى، نفس الاتجاه ونفس الطول.
- الانسحاب الذي يحوّل A إلى B يحوّل أيضا C إلى D.

2 الشعاعان المتساويان ومتوازي الأضلاع

خاصية

A، B، C، D أربع نقط بحيث كل ثلاثة منها ليست في استقامية.

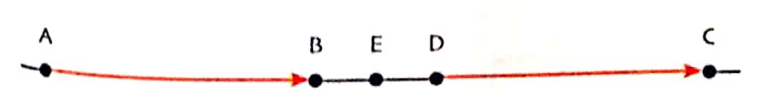
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ تعني أنّ الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

ملاحظات:

من أجل كل أربع نقط A، B، C، D لدينا:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ معناه للقطعتين [AC] و [BD] نفس المنتصف.
- إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

حالة خاصة: النقط A، B، C، D في استقامية.





• إنشاء صورة نقطة بانسحاب عُلم شعاعه

تمرين

1) أنشئ مثلثا ABC ثم النقطة D صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

2) أنشئ النقطة E حيث $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC}$.

حل

1) ننشئ مثلثا ABC (انظر الشكل المقابل).

D هي صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. إذن الرباعي ACDB متوازي أضلاع.

قطرا الرباعي ACDB هما [AD] و [BC].

ينتج أن D هي نظيرة A بالنسبة إلى النقطة I منتصف [BC].

2) على الشكل لدينا $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ إذن $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BD}$.

نلاحظ أن للشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{EB}$ نفس المنحى و هو منحى (BD)، نفس الطول و هو BD و نفس الاتجاه.

بالتالي B هي منتصف [DE] أي النقطة E هي نظيرة D بالنسبة إلى B (ومنه إنشاء E).

ينتج أن الانسحاب الذي يحول D إلى B هو الانسحاب الذي يحول B إلى E.

• إثبات تساوي شعاعين

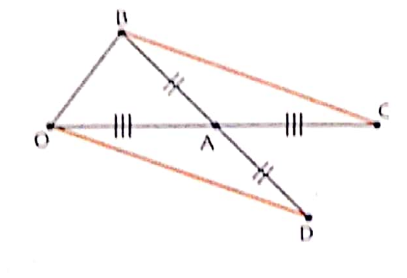
تمرين

OAB مثلث كيفي.

نسمي C نظيرة O بالنسبة إلى النقطة A و D النقطة حيث $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.

برهن أن $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$.

حل



A هي منتصف [OC] ومنتصف [BD] لأن C هي نظيرة O

بالنسبة إلى النقطة A و $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.

وبالتالي الانسحاب الذي يحول B إلى C هو نفسه الذي يحوّل O إلى D.

إذن $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$.

طريقة

لإثبات تَساوي شعاعين نعتمد على متوازي أضلاع أو على الانسحاب.

دوري الآن

أنشئ مثلثا FHG.

أنشئ النقطة E حيث $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{HE}$ والنقطة K حيث $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{HG}$.

أثبت أن (EG) و (FK) متوازيان.

3 الشعاعان المتساويان ومفهوم منتصف قطعة

خاصية

I ، A ، B ثلاث نقط .

إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

إذا كان $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ فإن I منتصف $[AB]$.



على الشكل المقابل لدينا $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ لأن للشعاعين $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{IB}$ نفس المنحى ونفس الاتجاه و $AI = IB$ إذن I منتصف $[AB]$.

4 مجموع شعاعين

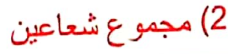
1) صورة نقطة بانسحابين متتابعين

A، B، C ثلاث نقط .

إذا كانت صورة نقطة كيفية M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ هي M' و صورة M' بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ هي M''

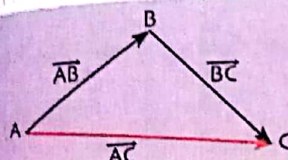
فإن : M'' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

ونقول $\overrightarrow{AC}$ هو مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$.



2) مجموع شعاعين

A، B، C ثلاث نقط.



مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AC}$. نكتب $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

المساواة $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ تسمى علاقة شـــال (لاحظ أن نهاية الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو مبدأ الشعاع $\overrightarrow{BC}$).

حالة خاصة: • إذا كانت A منطبقة على B، نقول أن $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع المعدوم ويرمز إليه بـ $\vec{0}$.

لدينا $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

5 الشعاعان المتعاكسان

A، B نقطتان. نعلم أنّ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

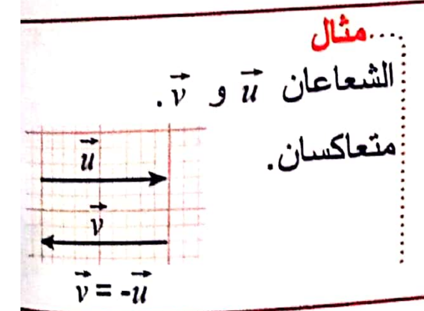
نقول أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان، ونكتب $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

للشعاعين المتعاكسين نفس الطول، ونفس المنحى واتجاهين متعاكسين.

مثال

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

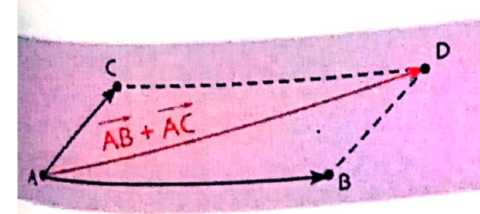
متعاكسان.



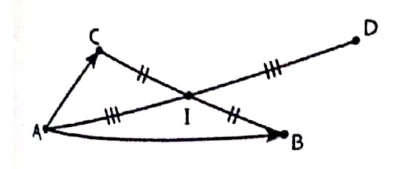
6 قاعدة متوازي الأضلاع

A، B و C ثلاث نقط ليست على استقامية.

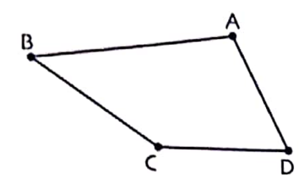
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ معناه ABDC متوازي أضلاع.



ملاحظة : D هي نظيرة A بالنسبة إلى منتصف القطر $[BC]$.



• إنشاء ممثل لمجموع شعاعين



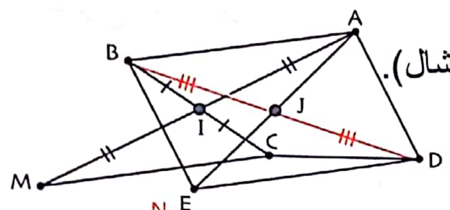
تمرين : 1) لاحظ الشكل المقابل ثم انقله. أنشئ النقطة M حيث $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$.

2) أنشئ النقطة N حيث $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

حل : 1) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$ يعني الرباعي ABMC متوازي أضلاع أي $[AM]$ و $[BC]$ لهما نفس المنتصف.

و بالتالي M هي نظيرة A بالنسبة إلى I منتصف $[BC]$ (الشكل).

2) لإنشاء $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ نعيّن شعاعا مبدؤه B ويساوي $\overrightarrow{AD}$ وليكن $\overrightarrow{BE}$.



أي $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD}$ ومنه $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$ (حسب علاقة شال).

ينتج أن $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE}$ أي N تنطبق على E.

طريقة

لإنشاء ممثل لمجموع شعاعين يمكن استعمال علاقة شال أو قاعدة متوازي الأضلاع.

• استعمال تساوي شعاعين لإنجاز برهان

تمرين

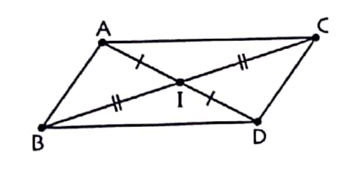
ABC مثلث، I منتصف $[BC]$ و D نقطة حيث $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$.

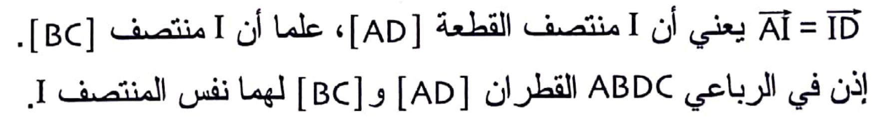
برهن أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

حل

نبرهن أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني الرباعي ABDC متوازي أضلاع.





$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$ يعني أن I منتصف القطعة $[AD]$، علما أن I منتصف $[BC]$.

إذن في الرباعي ABDC القطران $[AD]$ و $[BC]$ لهما نفس المنتصف I.

و بالتالي الرباعي ABDC متوازي أضلاع. ينتج أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

طريقة

لإثبات أن شعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متساويان، يكفي إثبات أن الرباعي ABDC متوازي أضلاع.

دوري الآن

1 ABDC متوازي أضلاع. E نظيرة A بالنسبة إلى C.

برهن أن $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE}$.

2 ABCD مستطيل.

أ) أنشئ ممثلا لكل شعاع من الشعاعين التاليين: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ ، $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$.

ب) أنشئ الممثل الذي مبدؤه A للشعاع $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

الأشعة والمساواة الشعاعية

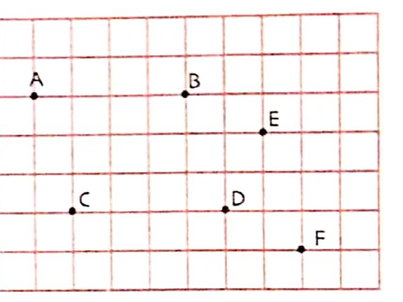
1 ABC مثلث كيفي.

$\vec{u}$ هو الشعاع الذي منحاه هو منحى المستقيم (AB)، اتجاهه من A إلى B وطوله AC.

1) انقل الشكل التالي:

2) أنشئ الشعاعين $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{GC}$ الممثلين للشعاع $\vec{u}$.

2 لاحظ الشكل



هل المساواة $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ صحيحة؟

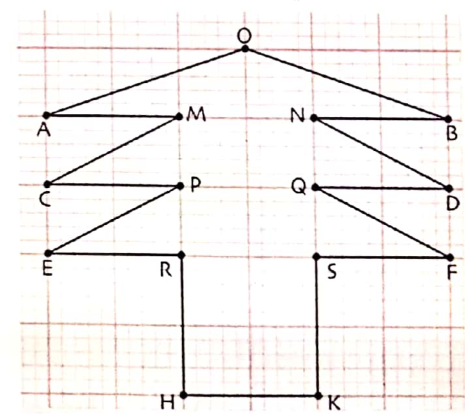
هل المساواة $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF}$ صحيحة؟

3 ABC مثلث كيفي. K هي منتصف $[BC]$.

1) أنشئ ممثلين للشعاع $\overrightarrow{AB}$.

2) أنشئ الممثل الذي مبدؤه K للشعاع $\overrightarrow{AK}$.

4 لاحظ الشكل التالي.



1) عيّن صورة R بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{EM}$.

2) اذكر 3 أشعة مساوية للشعاع $\overrightarrow{SP}$.

3) اذكر 6 أشعة مساوية للشعاع $\overrightarrow{CM}$.

5 ABCD معيّن.

1) أنشئ النقطة M حيث $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$ و النقطة N حيث $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC}$.

2) ما هي طبيعة الرباعي BMND؟

3) اذكر شعاعين مساويين للشعاع $\overrightarrow{NC}$.

الأشعة ومتوازي الأضلاع

6 OAB مثلث.

1) أنشئ النقطة M صورة O بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AO}$.

2) أنشئ النقطة N صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BM}$.

3) ما هي طبيعة الرباعي BMNA؟

7 1) انقل المثلث ABD (كما في الشّكل).

2) أنشئ النقطة C حيث ABCD متوازي أضلاع.

3) أنشئ النقطة E حيث ABDE متوازي أضلاع.

4) ماذا تقول عن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DE}$؟

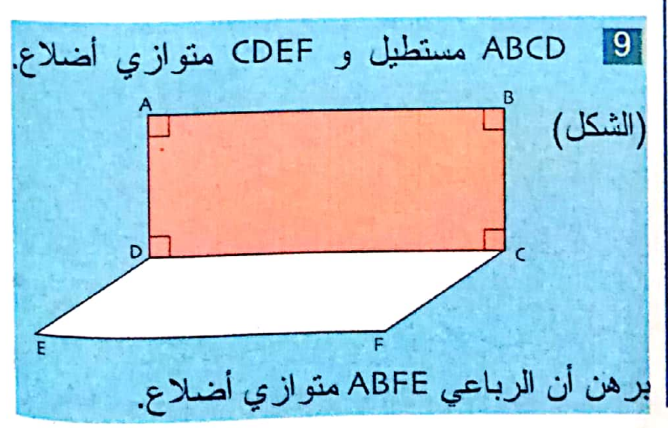
5) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{DB}$؟

8 لاحظ الشكل أدناه.

1) اذكر 4 أشعة مساوية للشعاع $\overrightarrow{GE}$.

2) برهن بطريقتين أن المستقيمين (GF) و (AC) متوازيان.

9 ABCD مستطيل و CDEF متوازي أضلاع. (الشكل)



برهن أن الرباعي ABFE متوازي أضلاع.

مجموع شعاعين- علاقة شال

10 AFC ،BCD ،ABC و EAB هي مثلثات متقايسة الأضلاع.

1) عيّن في كل حالة مما يلي ممثلا للشعاع:

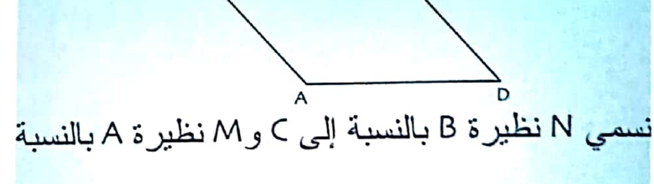
$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}$ ، $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ ، $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FA}$.

2) أنشئ الممثل الذي مبدؤه C للشعاع $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

3) أنشئ الممثل الذي مبدؤه E للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

4) أنشئ الممثل الذي مبدؤه A للشعاع $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$.

11 ABCD متوازي أضلاع (الشكل).



نسمي N نظيرة B بالنسبة إلى C و M نظيرة A بالنسبة إلى D.

1) ماهي صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$ متبوعًا بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AM}$ ؟

2) ماهي صورة N بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{MA}$ متبوعًا بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ ؟

12 لاحظ الشكل أدناه.

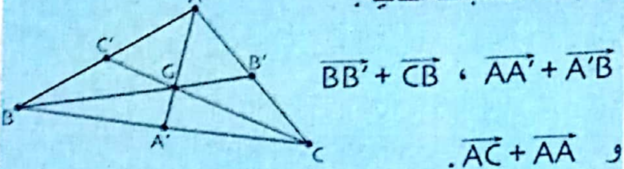
1) برهن أن $\overrightarrow{MO'}=\overrightarrow{ON}$.

2) هل $MB=BN$ ؟

هل $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BN}$ ؟ لماذا؟

3) عيّن $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}$.

13 ABC مثلث مركز ثقله G.



1) بسّط الكتابات التالية:

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}$ ، $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA}$.

2) عيّن في كل حالة مما يلي ممثلا للشعاع:

$\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AB'}$ ، $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}$ و $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}$.

3) أنشئ الممثل الذي مبدؤه G للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

14 ABC مثلث كيفي.

1) أنشئ النقطة D حيث $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

2) أنشئ النقطة E حيث $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

3) أنشئ النقطة F حيث $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$.

15 يعطى الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$:

1) أنشئ ممثلا للشعاع $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$.

2) أنشئ ممثلا للشعاع $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$.

3) أنشئ بطريقتين شعاعا يساوي $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

16 A، B، C، D، E نقط حيث $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{ED}$ و B لا تنتمي إلى (AC).

1) أنجز شكلا مناسبا.

2) ماهو نوع الرباعي ABCD؟ اشرح.

3) عيّن F حيث $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ و K حيث $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة	الإجابات (1)	الإجابات (2)	الإجابات (3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	على الشكل المقابل الشعاعان اللذان لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه ونفس الطول هما...	$\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{GH}$	$\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{GH}$	$\overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{EF}$	130
2	إذا كانت النقطة T هي صورة S بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ فإن...	$\overrightarrow{TS}=\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{TS}=\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{AB}$	130 و 131
3	في الشكل المقابل لدينا...	الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعاكسان	الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{GH}$ متعاكسان	الشعاعان $\overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{EH}$ متعاكسان	130
4	A، B، C ثلاث نقط. ممثل الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ هو ...	الشعاع $\overrightarrow{CB}$	الشعاع $\overrightarrow{BC}$	الشعاع $\overrightarrow{AE}$	132 و 133
5	ABC مثلث قائم في A حيث $AB=4$ و $AC=3$. طول الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ هو..	7	$\sqrt{7}$	5	132
6	A، B، C ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$. إذن	B و C متناظرتان بالنسبة إلى A	A و B متناظرتان بالنسبة إلى C	A و C متناظرتان بالنسبة إلى B	131 و 132
7	الشعاع $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}$ يساوي الشعاع	$\vec{0}$	$\overrightarrow{MP}$	$\overrightarrow{PM}$	132

أدمج تعلّماتي

وضعية

تجنُبا لحوادث المرور الأليمة، قرّرت إحدى البلديات وضع ممر الراجلين بين حافتين متوازيتين للطريق وهذا لأجل مساعدة أطفال الحي للتنقل إلى المدرسة بأمان.

حدّد موقع الممر بحيث يكون طول المسلك من A إلى B مرورا بالموضعين M و N أقصر ما يُمكن.



تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: • نُعبّر على طول المسلك بـ: $AM + MN + NB$ ما هي النقط الثابتة و النقط المتغيّرة؟

تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل: • إنجاز شكل هندسي لتمثيل الوضعية. ما هي أقصر مسافة بين مستقيمين متوازيين؟ في حالة نقطتين متمايزتين A و B' ما هو الشرط الّذي تحقّقه النّقطة M حتى تكون $AM+MB'$ أقصر ما يمكن.
• التفكير في استبدال المسلك المطلوب بمسلك له نفس الطول.

تنفيذ استراتيجية الحل المختارة: • تعيين B' صورة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{NM}$. دراسة الشكل الرباعي MB'BN. ما هو موقع النقطة M حتى يكون $AM + MB'$ أقصر ما يُمكن ؟ ما هو موقع النقطة N؟

17 النقطة J هي تقاطع قطري متوازي الأضلاع ABCD.

1) أنشئ النقطتين O و M بحيث يكون

$\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}$ و $\overrightarrow{JO} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}$

2) بيّن أن J منتصف [OM].

3) بيّن أن $\overrightarrow{JO} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

18 ABC مثلث كيفي، النقطة O هي منتصف [AC] و D نظيرة B بالنسبة إلى O.

1) أنشئ النقط H، K و L حيث $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AO}$ ، $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}$.

2) برهن أن $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{AC}$.

3) ما هي طبيعة الرباعي OHKL.

4) المستقيمان (CK) و (LH) متقاطعان في النقطة G.

برهن أن G مركز ثقل المثلث OKL.

19 من امتحان شهادة التعليم المتوسط

1) أنشئ مثلثا EFG قائما في F حيث EF = FG = 4cm.

2) أنشئ النقطتين: D صورة النقطة F بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{EF}$ و C صورة النقطة E بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{GD}$.

3) بيّن أنّ الرباعي EGDC مربع.

- احسب مساحته.

4) ليكن الشعاع $\overrightarrow{U}$ حيث $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FG}$ ، بيّن أنّ $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{ED}$.

20 لاحظ في الشكل التالي متوازي أضلاع ABEF مركزه D و متوازي أضلاع ABCD.

1) بيّن أن $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE}$.

2) بسّط الكتابة $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{FE}$.

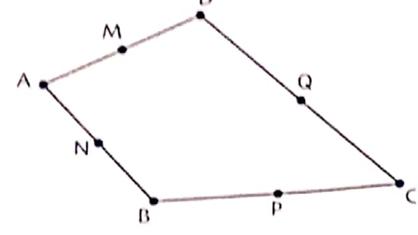
3) أنشئ النقطة M حيث $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{CM}$.

21 A، B، K ثلاث نقط ليست في استقامية. نسمّي L منتصف [AB].

D النقطة التي من أجلها يكون الرباعي BLKD متوازي أضلاع و E النقطة المعرّفة كالآتي: $\overrightarrow{LE} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LK}$

أثبت أنّ L منتصف [ED].

22 ABCD رباعي و M ، N ، P ، Q هي على الترتيب، منتصفات [DA]، [AB]،[BC]، [CD].



1) بيّن أن $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

2) برهن أن الرباعي MNPQ متوازي أضلاع.

23 M نقطة خارج مثلث ABC.

1) أنشئ النقطتين L و K حيث $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$

2) بيّن أن A منتصف [KL].

24 KLM مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي L حيث KM = 6cm ، KL = 5cm .

I منتصف [KM] و J منتصف [KL] .

J' صورة J بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{MJ}$.

بيّن أن $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KJ'} = \overrightarrow{KL}$.

25 1) أرسم مثلثا ABC ثم عيّن النقطة M منتصف القطعة [BC].

2) أنشئ النقطة E، نظيرة النقطة A بالنسبة للنقطة M.

أثبت أنّ $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BA}$.

3) أنشئ النقطة F، صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$. بيّن أنّ النقطة C هي منتصف القطعة [EF] ثم استنتج نوع الرباعي ABCF.

الأشعة و الانسحاب باستخدام البرمجية جيوجبرا

1) رسم شعاع $\overrightarrow{AB}$

• انقر مرتين على و اختر Point ثم انقر على الصفحة جيوجبرا فتظهر النقطة A.
(في حالة عدم ظهور A ، نضغط باليمنى على النقطة ونختار Afficher l'étiquette).

• ارسم نقطة B بنفس الكيفية.

• انقر على و اختر Vecteur و انقر على A ثم على B. ماذا تلاحظ؟

2) إنشاء ممثل الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ الذي مبدؤه A.

• احجز Saisie Vecteur(A;B)+Vecteur(A;C) فيظهر ممثل w للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

• انقر على و اختر ثم انقر على الشعاع $\vec{w}$ و على النقطة A فنحصل على شعاع $\overrightarrow{AA'}$.

• انقر على و اختر Relation a=b و انقر على $\vec{w}$ ثم على $\overrightarrow{AA'}$. ماذا تلاحظ؟

• ارسم نقطة M و الممثل $\overrightarrow{ME}$ للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. استعمل الأيقونة Relation a=b لمقارنة الشعاعين $\overrightarrow{ME}$ و $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. ماذا تلاحظ؟ اشرح.

3) رسم دائرة مركزها معطى و نصف قطرها معطى

انقر على و اختر Cercle (centre-rayon) و انقر على النقطة D و احجز 1 في النافذة الظاهرة ثم OK و تظهر الدائرة (Γ) التي مركزها D و نصف قطرها 1.

4) صورة دائرة بانسحاب

• انقر على و اختر Translation و اضغط على الدّائرة (Γ) ثم على الشعاع $\overrightarrow{BC}$ فتظهر الدّائرة (Γ') صورة (Γ) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$.

5) مقارنة أشعة

• ارسم نقطتين A و B.

• احجز Saisie polygone(A,B,4) فيظهر مربع ABCD.

• استعمل الأيقونة Relation a=b لمقارنة : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}$ ثم $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BD}$.

دوري الآن

نعتبر النقط A، B، C، E و الدّائرة (Γ) التي مركزها E و نصف قطرها 2 .

(Γ_1) هي صورة (Γ) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ و (Γ_2) هي صورة (Γ) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}$. أنشئ الدّوائر (Γ) و (Γ_1) و (Γ_2).

12 الأشعة في معلم

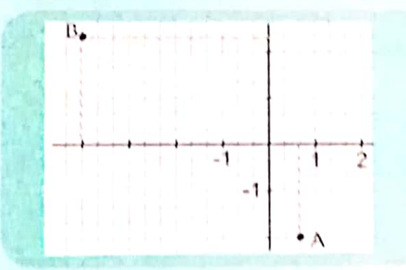
سأتعلّم في هذا الباب

- قراءة مركبتي شعاع في معلم.
- تمثيل شعاع بمعرفة مركّبتيه.
- حساب مركبتي شعاع بمعرفة إحداثيات مبدإ ونهاية ممثله.
- حساب إحداثيتي منتصف قطعة بمعرفة إحداثيتي كل من طرفيها.
- حساب المسافة بين نقطتين في معلم متعامد ومتجانس.

إحداثيتا نقطة هما عددان تحددان موضع هذه النقطة في المستوي بالنسبة إلى معلم معطى.
كانت فكرة الإحداثيات مبهمة وحدسية عند المصريين القدماء وأصبحت أكثر وضوحا مع أرخميدس (287 - 212 قبل الميلاد) وأبولونيوس دبيرغا Apollonius de Perga (القرن الثالث قبل الميلاد). وقد طوّر مفهوم الإحداثيات في أبحاث العالمين فيرما (1601 - 1665) وديكارت (1596 - 1650) كل على حدى، مما أدى إلى ظهور الهندسة التحليلية. ويحكى أن ديكارت، وبينما كان يشاهد ذبابة تحط على مواقع مختلفة من نافذته التي تتكون من بلاطات زجاجية صغيرة، أخذ يحدّد موقع هذه الذبابة بعددين سُمّيا فيما بعد إحداثيتي نقطة في معلم. يتميز ديكارت بإحدى مقولاته الشهيرة وهي «أنا أفكر، إذن أنا موجود».

بيار فيرما — روني ديكارت

تحدّ



المستوي مزوّد بمَعلم متعامد ومتجانس مبدؤه O. (الوحدة 1cm)

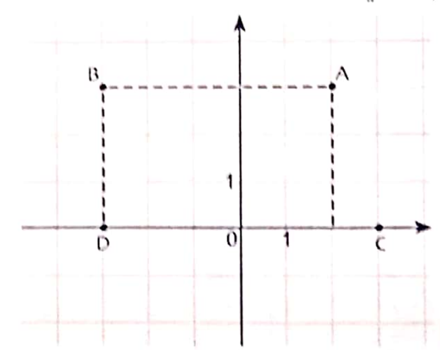
$A\left(\frac{2}{3};-2\right)$ و $B\left(-4;\frac{7}{3}\right)$ نقطتان من المستوي.

احسب القيمة المضبوطة للمسافة AB.

استعدّ

أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

1) في المَعلم الآتي:



إحداثيتا A هما $(2;3)$.	
إحداثيتا B هما $(3;3)$.	
إحداثيتا منتصف القطعة $[DC]$ هما $(0;0)$.	
المسافة بين C و D هي 0.	

2) في مَعلَم للمستوي، النقطتان $M(0;1)$ و $N(1;0)$ تقعان على محور الفواصل.

3) ABCD متوازي أضلاع، إذن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

4) ABCD متوازي أضلاع. إذن الانسحاب الذي يحول D إلى C يحوّل أيضا A إلى B.

5) M و N نقطتان. J منتصف $[MN]$، إذن $\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{JN}$.

6) ABCD متوازي أضلاع. إذن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

1 قراءة مركّبتي شعاع

المستوي مزوّد بمعلم متعامد ومتجانس $(O\,;\,I\,,J)$

(يُسمّى المَعلَم $(O\,;\,I\,,J)$ مَعلمًا متعامدا ومتجانسا في حالة $OI = OJ = 1$ و $((OI) \perp (OJ))$ (الشكل)

1) عيّن إحداثيتي كل نقطة من النقاط A، B، C.

2) النقطة C هي صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

ماهو طول هذا الشعاع ؟

ماهو منحاه ؟ ماهو اتجاهه ؟

النقطة B هي صورة النقطة C بانسحاب .

ماهو شعاع هذا الانسحاب؟

عيّن منحى، اتّجاه وطول هذا الشعاع.

3) لاحظ أنّ الإنتقال من A إلى C يكون، بموازاة المستقيم (OI)، في الاتجاه الموجب بِـ 8 وحدات.

ثم نتنقل من C إلى B، بموازاة المستقيم (OJ)، في الاتجاه السالب بوحدتين.

نقول إنّ 8 و 2- هما مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ونكتب $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$.

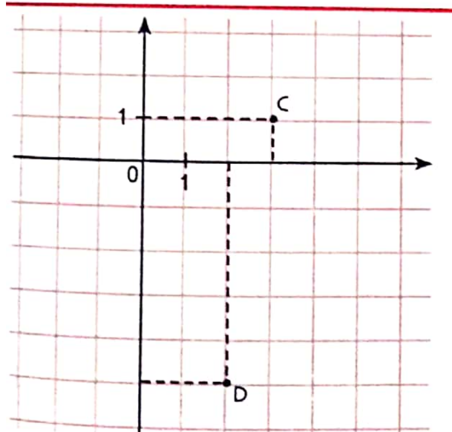
4) D هي نقطة إحداثياتها $(3;-2)$.

باستعمال نفس الكيفية التي رأيتها في الجزء (3) للانتقال من النقطة B إلى النقطة D، استنتج مركبتي الشعاع $\overrightarrow{BD}$.

5) عيّن مركبتي كل شعاع من الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{OC}$ ، $\overrightarrow{OD}$ ؟

انقل و أتمم، «إذا كانت M نقطة إحداثياتها $(x\,;y)$ في مَعلَم من المستوي مبدؤه O، فإنّ مركبتي الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما ... و ... .

2 مركبتا شعاع علمت إحداثيات مبدئه ونهايته



المستوي مزود بمعلم مبدؤه O. (الشكل)

أ) C و D نقطتان من المستوى. (الشكل)

1) عيّن إحداثيتي كل من C و D.

2) ما هما مركبتا الشعاع $\overrightarrow{CD}$؟

3) E نقطة حيث مركبتا $\overrightarrow{DE}$ هما 3 و 4.

أوجد إحداثيتي النقطة E.

ب) نفرض أن إحداثيتي النقطتين A و B هما $(x_A\,;y_A)$ و $(x_B\,;y_B)$ على الترتيب.

مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما a و b.

1) عبّر عن a بدلالة x_A و x_B وعن b بدلالة y_A و y_B.

2) $F(6;5)$ نقطة من المستوي. عيّن الشعاع $\overrightarrow{CF}$. تحقّق أن للشعاعين $\overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{CF}$ نفس المركبتين.

نقول إنّ الشعاعين $\overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{CF}$ متساويان. نكتب $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$.

3 إحداثيتا منتصف قطعة مستقيم

المستوي مزود بمَعلَم متعامد ومتجانس مبدؤه O.

1) علّم النقط $K(5;3)$ و $L(-3;1)$ و J منتصف القطعة $[KL]$.

أوجد مركبتي كل من الشعاعين $\overrightarrow{KJ}$ و $\overrightarrow{JL}$. ماذا تستنتج؟

2) نبحث الآن عن إحداثيتي منتصف قطعة مستقيم في الحالة العامة.

نعتبر $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ ، $I(x_I;y_I)$ حيث I منتصف $[AB]$.

أ) اشرح لماذا $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.

ب) أوجد مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AI}$ بدلالة إحداثيتي كل من النقطتين A و I.

جـ) أوجد مركبتي الشعاع $\overrightarrow{IB}$ بدلالة إحداثيتي كل من النقطتين B و I.

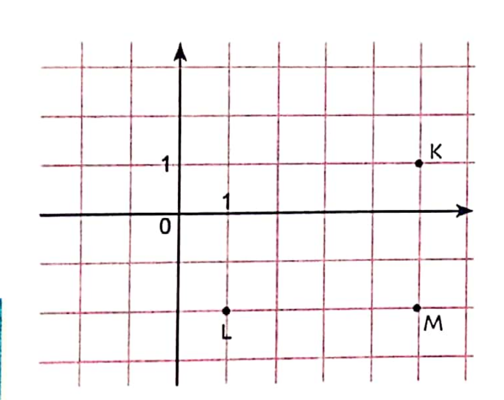
عبّر عن x_I بدلالة x_A و x_B ثم عن y_I بدلالة y_A و y_B.

3) انقل وأتمم: «إذا كانت $(x_A;y_A)$ إحداثيتي .... و .... إحداثيتي B فإن إحداثيتي I منتصف القطعة $[AB]$

هما .... = x_I و .... = y_I ».

4 المسافة بين نقطتين

أ) الـمَعلَم متعامد ومتجانس (مبدؤه O)



1) اعتمادًا على الشكل المقابل اقرأ إحداثيتي كل من النقط K، L، M.

2) انقل الشكل المقابل ثم أنشئ المثلث KLM.

3) احسب الأطوال KM و LM و KL.

ب) نعتبر A و B نقطتان حيث $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

و C نقطة إحداثيتاها $(x_C;y_C)$ بحيث ABC مثلث قائم في C.

1) أوجد عبارة AC بدلالة x_A ، x_B ثم عبارة BC بدلالة y_A و y_B .

2) استنتج عبارة AB^2 بدلالة x_A ، x_B ، y_A ، y_B .

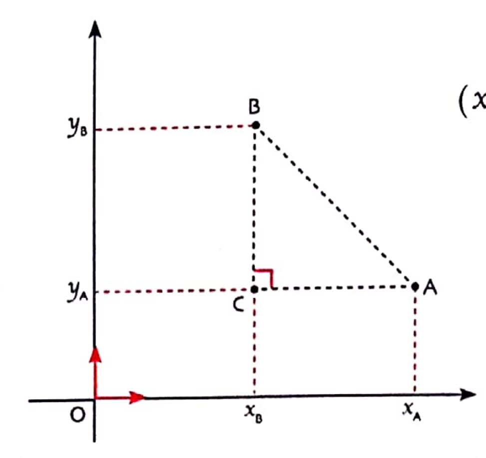
3) انقل وأكمل: «إذا كانت A و B نقطتان إحداثياتهما $(x_A;y_A)$ و $(x_B;y_B)$

على الترتيب، فإن .... = AB».

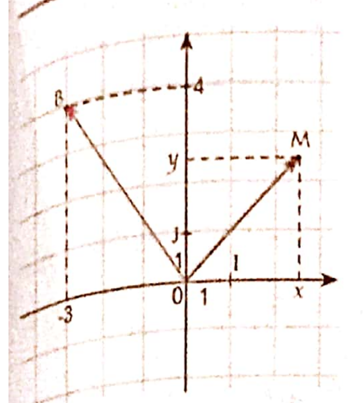
4) باستعمال عبارة الطول AB المحصل عليها في السؤال 3)

من الجزء ب) أوجد من جديد الأطوال KM، LM ثم KL.

قارن هذه النتائج بالنتائج المحصل عليها في الجزء (أ).



1 مركبتا شعاع



المستوي مُزوّد بمعلم $(O ; I , J)$ مبدؤه النقطة O.
إذا كانت M نقطة من المستوي إحداثيتاها $(x ; y)$، فإنّ مركبتي الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما x و y نكتب $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

مثال: إحداثيتا النقطة B هما 3- و 4 نكتب $B(-3;4)$.
مركبتا الشعاع $\overrightarrow{OB}$ هما 3- و 4 نكتب $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2 أنواع المعالم

النقطة A إحداثيتاها 3 و 2 نكتب $A(3 ; 2)$ والشعاع $\overrightarrow{OA}$ مركبتاه 3 و 2 نكتب $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

معلم متعامد متجانس	معلم متعامد	معلم متجانس	معلم كيفي
$OI = OJ$	$OI \neq OJ$	$OI = OJ$	$OI \neq OJ$
$(OI) \perp (OJ)$	$(OI) \perp (OJ)$	(OJ)، (OI) غير متعامدين	(OJ)، (OI) غير متعامدين

3 مركبتا شعاع علمت إحداثيات مبدئه ونهايته

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O ; I , J)$، مبدؤه O.

أ) القراءة في تمثيل بياني: لقراءة مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$، ننتقل من النقطة A بالتوازي مع المستقيم (OI) في الاتجاه الموجب (نحو اليمين) بـ 7 وحدات ثم ننتقل بالتوازي مع المستقيم (OJ) في الاتجاه الموجب (نحو الأعلى) بـ 3 وحدات للوصول إلى النقطة B.
ونقرأ: مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما 7 و 3. ونكتب $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

• لقراءة مركبتي الشعاع $\overrightarrow{CD}$ ننتقل من النقطة C في الاتجاه السالب (نحو اليسار) بالتوازي مع المستقيم (OI) بـ 5 وحدات ثم ننتقل في الاتجاه الموجب (نحو الأعلى) بالتوازي مع المستقيم (OJ) بوحدة واحدة للوصول إلى النقطة D. ونقرأ: مركبتا الشعاع $\overrightarrow{CD}$ هما 5- و 1. ونكتب عندئذ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ب) حساب مركبتي شعاع

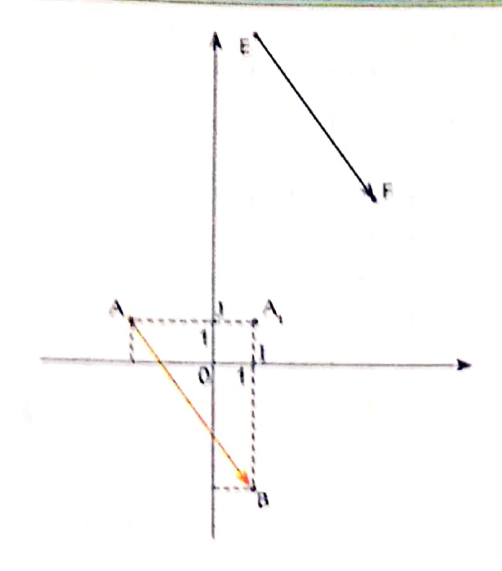
خاصية

إذا كانت A و B نقطتان، إحداثياتهما $(x_A ; y_A)$ و $(x_B ; y_B)$ على الترتيب في معلم فإن مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $x_B - x_A$ و $y_B - y_A$.

مثال

نعتبر النقطتين $A(-2,5;4)$ و $B(1;-1)$ من المستوي المزوّد بمعلم متعامد ومتجانس مبدؤه O.
لدينا $x_B - x_A = 1-(-2,5) = 3,5$ و $y_B - y_A = -1-4 = -5$.
إذن مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما 3,5 و 5-. نكتب $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3,5 \\ -5 \end{pmatrix}$

• تمثيل شعاع علمت مركبتاه



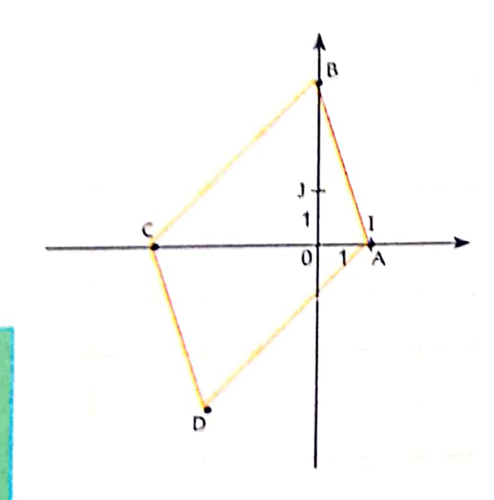
تمرين: المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس، مبدؤه النقطة O.
الوحدة هي طول ضلع مربّع من المرصوفة.
1) أنشئ الشعاع $\overrightarrow{AB}$ حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.
2) أنشئ ممثلا آخر $\overrightarrow{EF}$ للشعاع $\vec{u}$.

حل: 1) إنشاء الشعاع $\overrightarrow{AB}$ حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
للحصول على ممثل أوّل، نختار نقطة A إحداثياتها مثلا $(-2;1)$
نحوّل A بانسحاب مُوازٍ لمحور الفواصل بـ 3 وحدات إلى اليمين (في الاتجاه الموجب) فنتحصل على النقطة A_1.
نحوّل النقطة A_1 بانسحاب، مُوازٍ لمحور التراتيب بـ 4 وحدات إلى الأسفل (في الاتجاه السالب) فنتحصل على النقطة B.
ننشئ الشعاع $\overrightarrow{AB}$. وهكذا نتحصل على ممثّل للشعاع $\vec{u}$.
2) إنشاء الشعاع $\overrightarrow{EF}$ حيث $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$. نختار النقطة E ونعيّن النقطة F حيث $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
يعني الرباعي EABF متوازي أضلاع. لإنشاء F يكفي إنشاء المتوازي الأضلاع EABF.

طريقة

لتمثيل شعاع عُلمت مركبتاه $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$، نختار نقطة كمبدإ لهذا الممثل ثم نحولها بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$ فنحصل على نقطة نحولها بدورها بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$ للحصول على نهاية الشعاع المعطى.

• حساب مركبتا شعاع، علمت إحداثيات مبدئه ونهايته



تمرين: المستوي مزود بمَعلَم متعامد ومتجانس، مبدؤه النقطة O.
$A(1;0)$ ، $B(0;3)$ ، $C(-3;0)$ ، $D(-2;-3)$ نقط من المستوى.
1) علّم النقط A، B، C، D.
2) احسب مركبتي كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$. ماذا تلاحظ؟

حل: 1) تعليم النقط A، B، C، D (الشكل)
2) حساب مركبتي كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$.
لدينا $x_B - x_A = 0 - 1 = -1$ و $y_B - y_A = 3 - 0 = 3$. إذن $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
$x_C - x_D = -3 + 2 = -1$ و $y_C - y_D = 0 + 3 = 3$. إذن $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

الملاحظة: للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ نفس المركبتين $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



للتحقق من تساوي شعاعين، يمكن التحقّق من تساوي مركبتي أحدهما مع مركبتي الآخر.

دوري الآن

1 المستوي مزود بمَعلَم متعامد ومتجانس، مبدؤه النقطة O.
أنشئ ممثلا لكل شعاع من الشعاعين $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

2 المستوي مزود بمَعلَم متعامد ومتجانس، مبدؤه النقطة O.
نعتبر النقط $A(2;3)$ ، $B(-4;5)$ ، $C(1;0)$ ، $D(-1;1)$.
عيّن مركبتي كل شعاع مما يلي: $\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{BC}$ ؛ $\overrightarrow{DA}$.

نتيجة

في مستو منسوب إلى معلم مبدؤه O، إذا كانت M نقطة إحداثيتاها $(x\,;y)$ فإن مركبتي الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما x و y. نكتب $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

ملاحظة: لتعيين ممثلا للشعاع $\overrightarrow{OM}$ يكفي تعليم النقطة M.

مثال

إحداثيتا النقطة A هما $(-3\,;\,2,5)$.

إذن مركبتا الشعاع $\overrightarrow{OA}$ هما $\begin{pmatrix}-3\\2,5\end{pmatrix}$.

نكتب $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-3\\2,5\end{pmatrix}$.

جـ) الشعاعان المتساويان

خاصية

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ شعاعان، مركبتاهما $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ على الترتيب.

نقول عن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ إنّهما متساويان إذا كان $x = x'$ و $y = y'$ أي:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ معناه $x = x'$ و $y = y'$.

مثال

نقول إنّ الشعاعين $\overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{CF}$ متساويان.

نكتب $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$.

مثال

A، B، C، D نقط إحداثياتها $(1\,;-1)$، $(-4\,;-1)$، $(3\,;-1)$، $(-3;2)$ و $(4;2)$ على الترتيب.

لدينا $x_B - x_A = 3+4 = 7$ و $y_B - y_A = -1-(-1) = 0$

إذن $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$. ولدينا $x_D - x_C = 4-(-3) = 7$

و $y_D - y_C = 2-2 = 0$ إذن $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$.

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المركبتين.

إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

د) إحداثيتا منتصف قطعة مستقيم

خاصية

$A(x_A\,;y_A)$ و $B(x_B\,;y_B)$ نقطتان من المستوي.

و I منتصف القطعة $[AB]$. إذا كانت $(x_I\,;y_I)$ هما إحداثيتا I فإن $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

مثال

$A(3\,;-4)$، $B(-4;3)$ نقطتان من المستوي.

I منتصف القطعة $[AB]$.

$(x_I\,;y_I)$ إحداثيتا النقطة I لدينا: $x_I = \frac{3+(-4)}{2} = -\frac{1}{2}$

و $y_I = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}$.

إذن إحداثيتا I هما $\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$ أي $I\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$.

هـ) المسافة بين نقطتين

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس، مبدؤه النقطة O.

خاصية

إذا كانت $A(x_A\,;y_A)$ و $B(x_B\,;y_B)$

فإن المسافة بين النقطتين A و B هي

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

مثال

$A(2;5)$، $B(-1;1)$ نقطتان من مستوٍ مزود بمعلم متعامد ومتجانس. (الوحدة 1cm)

لدينا $x_B - x_A = -1-2 = -3$ و $y_B - y_A = 1-5 = -4$

إذن $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-3)^2 + (-4)^2$

أي $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 9 + 16 = 25$.

ينتج أن $AB = \sqrt{25}$ أي $AB = 5cm$.

• إنجاز برهان

تمرين: المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس، مبدؤه O.

$C(2;-5)$ ، $B(2;3)$ ، $A(6;-1)$ نقط من المستوي.

1) علّم النقط A، B، C.

2) برهن أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

حل: 1) تعليم النقط A، B، C (الشكل)

2) لإثبات أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين نحتاج إلى حساب الأطوال AB ، AC ، BC.

لدينا $x_B - x_A = 2 - 6 = -4$ و $y_B - y_A = 3 + 1 = 4$ ، إذن $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$.

$x_C - x_A = 2 - 6 = -4$ و $y_C - y_A = -5 + 1 = -4$ ، إذن $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$. لدينا $x_C - x_B = 2 - 2 = 0$

و $y_C - y_B = -5 - 3 = -8$ إذن $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$. إذن $AB = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2} = \sqrt{32}$.

و $AC = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$ أي $AC = \sqrt{32}$.

و $BC = \sqrt{(-8)^2 + (0)^2} = \sqrt{64} = 8$ أي $BC = 8$.

لدينا $AB^2 + AC^2 = (\sqrt{32})^2 + (\sqrt{32})^2 = 64$ و $BC^2 = 64$. بالتالي $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

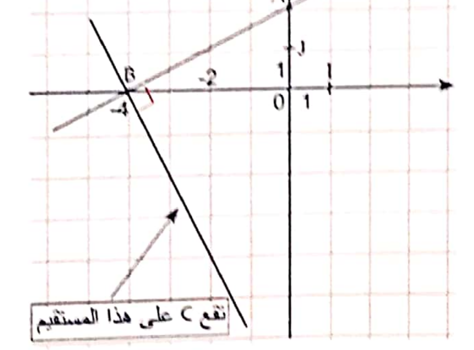
ينتج حسب الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورث أن المثلث ABC قائم في A وحيث أن $AB = AC$ فإن ABC قائم ومتساوي الساقين.

• حساب مسافات

تمرين: المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس، مبدؤه O. (الوحدة 1cm)

$A(0;2)$ ، $B(-4;0)$ ، $C(-2;y)$ ثلاث نقط.

عيّن y حتى يكون المستقيمان (AB) و (BC) متعامدين.



حل: يكون المستقيمان (AB) و (BC) متعامدين إذا كان المثلث ABC قائم في B. إذن يكفي تعيين y بحيث يكون ABC قائم في B.

أي نعيّن y بحيث يكون $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\y-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\y\end{pmatrix}$.

إذن $AB^2 = 20$ ، $AC^2 = 4 + (y-2)^2$ ، $BC^2 = 4 + y^2$.

بما أنّ $AB^2 + BC^2 = AC^2$ وبالتعويض نجد: $20 + 4 + y^2 = 4 + (y-2)^2$. ومنه ينتج $y = -4$.

دوري الآن

1 $A(2;2)$ ، $B(2;-2)$ ، $C(-2;-2)$ ، $D(-2;2)$ نقط من المستوي المزوّد بمعلم متعامد ومتجانس.

برهن أنّ الرباعي $ABCD$ مربع.

2 $A(-2;0)$ ، $B(0;-2)$ نقطتان في معلم متعامد ومتجانس، مبدؤه النقطة O.

• عيّن إحداثيتي I مركز الدائرة التي قطرها $[AB]$.

• برهن أنّ النقطة O تنتمي إلى هذه الدائرة.

إحداثيا نقطة - مركبتا شعاع

1 1) ارسم معلما متعامدا ومتجانسا في المستوي، مبدؤه O، علّم النقطتين $I(1;0)$ و $J(0;1)$.

2) علّم النقط $A(-1;2)$، $B(3;-3)$، $C\left(\frac{1}{2};1\right)$، $D(-2,5;0)$.

3) أنشئ الرباعي ABCD.

2 المستوي مزوّد بمعلم متعامد ومتجانس، مبدؤه النقطة O. (الوحدة 1cm)

A، B، C، D، E، F نقط من المستوي (الشكل)

1) بقراءة بيانية، عيّن كل من النقط A، B، C، D، E و F.

2) أوجد مركبتي كل من الأشعة: $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$، $\overrightarrow{OD}$، $\overrightarrow{OE}$، $\overrightarrow{OF}$.

3 المستوي مُزوّد بمعلم متعامد ومتجانس مبدؤه النقطة O. (الوحدة 1cm).

1) A و B نقطتان حيث $A(1;3)$ و $B(-2;-3)$

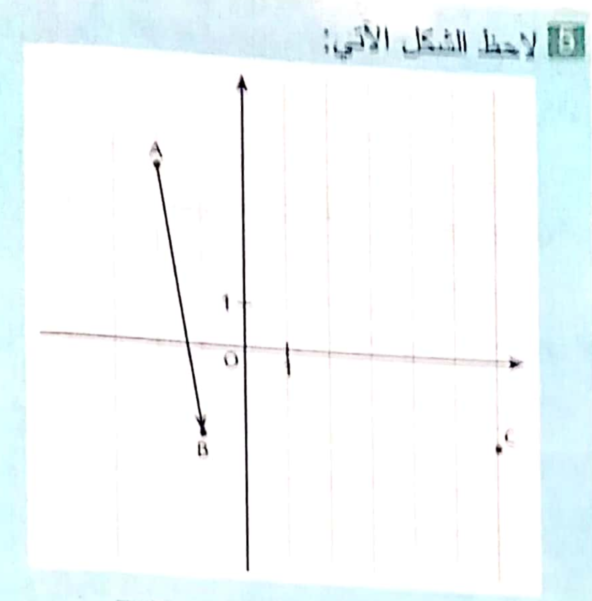
علّم النقطتين A و B.

2) عيّن النقط C، D، E، F بحيث:

- C نظير A بالنسبة لـ O.
- D نظير B بالنسبة لمحور التراتيب.
- E نظير D بالنسبة لمحور الفواصل.
- $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

4 $\vec{u}$ شعاع حيث $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$. مثّل في معلم لمستو، ثنائيتين نقطيتين تُمثّل كل منهما الشعاع $\vec{u}$.

5 لاحظ الشكل الآتي:



1) بقراءة بيانيّة عيّن مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

2) عيّن النقطة I حيث $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$.

3) ما هي طبيعة الرباعي AICB؟

مركبتا شعاع عُلمت إحداثيات مبدئه ونهايته

6 المستوي مزوّد بمعلم مبدؤه O.(الوحدة 1cm).

في كل حالة مما يلي، عيّن مركبتي كل شعاع من الأشعة $\overrightarrow{MN}$، $\overrightarrow{NP}$، $\overrightarrow{MP}$.

1) $M(1;6)$، $N(-2;-6)$، $P(-2;4)$.

2) $M\left(-1;\frac{1}{2}\right)$، $N\left(\frac{1}{2};\frac{13}{3}\right)$، $P(0;4)$.

3) $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$، $N\left(\frac{1}{4};\frac{5}{6}\right)$، $P(-4;7)$.

4) $M(\sqrt{3};2)$، $N(6;\sqrt{3})$، $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3};4\right)$.

7 المستوي مزوّد بمعلم مبدؤه O.(الوحدة 1cm).

$A(1,5;-6)$ ، $B(-3,5;-2,5)$.

1) أوجد مركبتي كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$، ماذا تُلاحظ؟

2) أوجد مركبتي كل من $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OA}$، ماذا تُلاحظ؟

8 المستوي مزوّد بمعلم متعامد ومتجانس مبدؤه O.

1) عيّن إحداثيتي النقطة A حيث $B(-10;10)$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

2) عيّن إحداثيتي النقطة D حيث $C(-4;1,5)$ و $\overrightarrow{CD}(2;-5)$

9 المستوي مزوّد بمعلم مبدؤه O.(الوحدة 1cm).

A، B، P، نقط من المستوي حيث $A(2;2)$،

$B(-3;2,5)$ ، $P(x;y)$.

عيّن x و y في كل حالة من الحالتين الآتيتين:

1) $\vec{AB} = \vec{OP}$ 2) $\vec{AB} = \vec{PO}$

إحداثيتا منتصف قطعة - المسافة بين نقطتين

10 المستوي مزوّد بمعلم مبدؤه O.(الوحدة 1cm).

A و B نقطتان من المستوي

بحيث $A(-5;2)$ و $B(-6;-3)$.

1) أوجد إحداثيتي النقطة I منتصف القطعة [AB].

2) أوجد إحداثيتي النقطة J بحيث $\vec{JB} = \vec{OJ}$.

11 نعتبر النقطتين $A(5;9)$ ، $B(1;-3)$.

[AB] قطر للدائرة $(\mathscr{C})$.

احسب إحداثيتي النقطة K مركز الدائرة $(\mathscr{C})$.

12 في معلم متعامد ومتجانس لمستوٍ، (الوحدة 1cm).

تُعطى النقط $A(1;-1)$ ، $B(0;3)$ ، $C(-2;0)$.

1) احسب إحداثيتي النقطة D بحيث $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$.

2) علّم النقط A، B، C، D.

3) ما نوع الرباعي ABCD؟ برّر إجابتك.

13 في معلم متعامد ومتجانس لمستوٍ، (الوحدة).

تُعطى النقط $A(3;0)$ ، $B(0;2)$ ، $C(2;5)$ ، $D(5;3)$

1) تحقّق أنّ للقطعتين [AC] و [BD] نفس المنتصف. ماذا تستنتج؟

2) تحقّق أنّ $AB = BC$. ماذا تستنتج؟

3) تحقّق أنّ $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ماذا تستنتج؟

4) ما نوع الرباعي ABCD؟

14 في معلم متعامد ومتجانس لمستوٍ، (الوحدة 1cm).

تُعطى النقط $A(1;1)$ ، $B(-1;4)$ ، $C(3;3)$.

1) علّم النقط A، B و C.

2) عيّن إحداثيتي النقطة D بحيث $\vec{AB} = \vec{DC}$.

3) ما نوع الرباعي ABCD؟

15 تُعطى النقاط $K(0;2)$ ، $L(3;4)$ ، $M(1;2)$

احسب القيمة المضبوطة لكل من: KL، KM، ML.

16 $(\mathscr{C})$ الدائرة التي مركزها O مبدأ المعلم ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

1) هل النقطة $A(\sqrt{2};0)$ تنتمي إلى $(\mathscr{C})$؟

2) هل النقطة $B(\sqrt{2};\sqrt{2})$ تنتمي إلى $(\mathscr{C})$؟

17 احسب نصف قطر الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها النقطة $P(2;1)$ وتشمل النقطة $M(-1;1)$.

18 في معلم متعامد ومتجانس لمستوٍ، (الوحدة 1cm).

تُعطى النقط $A(1;0)$ ، $B(0;3)$ ، $C(3;4)$.

1) احسب AB و AC.

2) عيّن إحداثيتي النقطة I مركز الدائرة $(\mathscr{C})$ التي قطرها [AC].

3) بيّن أنّ B نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$.

4) بيّن أنّ $(BI) \perp (AC)$.

5) ما نوع المثلث ABC.

19 المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس، مبدؤه النقطة O.

نعتبر النقط $A(1;0)$ ، $B\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$، $C\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1) أثبت أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

2) تحقّق أن مبدأ المعلم هو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

20 في معلم متعامد ومتجانس لمستوٍ، (الوحدة 1cm).

تُعطى النقط $A(2;1)$ ، $B(3;-1)$ ، $C(-1;1)$.

1) علّم النقط A، B، C.

2) M نظيرة C بالنسبة إلى النقطة A، N نظيرة C بالنسبة إلى النقطة B و K صورة النقطة B بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{CA}$.

3) احسب إحداثيتي كل من النقط M، N و K ثم علّمها وتأكّد من الحسابات التي قُمت بها سابقا.

4) بيّن أنّ النقطة K هي منتصف [MN] بطريقتين مختلفتين (مرة باستعمال الإحداثيات ومرة باستعمال خواص هندسية).

أؤكد تعلماتي

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

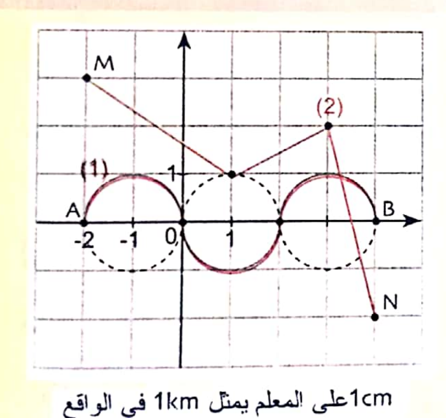
	الأسئلة	الإجابات (1)	(2)	(3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	في الشكل المقابل، مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما ...	$(-5;-4)$	$(-5;3)$	$(5;-3)$	142
2	$A(-2;-1)$، $B(-1;1)$ نقطتان من المستوي المزود بمعلم. إحداثيتا I منتصف $[AB]$ هما...	$\left(-\frac{3}{2};0\right)$	$\left(\frac{3}{2};0\right)$	$\left(0;-\frac{3}{2}\right)$	144
3	$A(4;3)$ نقطة من المستوي المزوّد بمعلم متعامد ومتجانس مبدؤه O. الطول OA هي...	5	3,5	7	144 و 145
4	على الشكل المقابل، المسافة AB تساوي...	9	$6\sqrt{2}$	$\sqrt{72}$	144 و 145
5	$A(2;3)$، $B(4;1)$ نقطتان من المستوي المزوّد بمعلم متعامد ومتجانس مبدؤه O. الطول AB يساوي.	$\sqrt{8}$	$2\sqrt{2}$	0	144 و 145

أدمج تعلّماتي

وضعية

يتدرّب عدّاءان استعدادا لمنافسة دُوليّة على مسارين مُمثّلين بالمنحنيين (1) و (2) في الشكل المقابل.

حدّد أقصر المسارين (1) و (2).



1cm على المعلم يمثل 1km في الواقع

تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: • عمّ يتحدث النص؟ • كيف أرتب المعطيات والتعليمات الواردة في نص المشكل؟

تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل مناسبة: • كيف أفسّر التمثيلين البيانيين (1) و (2)؟

تنفيذ استراتيجية الحل المختارة: • إحداثيتا كل نقطة من نقاط المسار (1) مع حامل محور الفواصل.

• أعبّر عن طول المسار (1) بمحيط ثلاثة أنصاف دوائر. • أبحث عن إحداثيتي كل طرف من قِطع المسار (2).

21 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مبدؤه O .(الوحدة 1cm).

A، B، C أربع نقط حيث $A(1;2)$ ، $B(4;3)$ ، $C(6;-3)$

1) علّم النقط A، B، C.

2) عيّن مركبتي كل شعاع من الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AC}$

3) احسب الأطوال AB، BC، AC.

4) ما نوع المثلث ABC.

22 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مبدؤه O .(الوحدة 1cm).

A، B، C و D أربع نقط حيث $A(1;3)$ ، $B(2;4)$ ، $C(5;1)$ و $D(2;0)$.

1) بيّن أنّ المثلث ABC قائم.

2) بيّن أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى دائرة واحدة، يُطلب تعيين إحداثيتي مركزها I ونصف قطرها.

3) احسب قيمة مقرّبة لكل من الزاويتين $\widehat{ACD}$ و $\widehat{BCA}$ ، ثم أعط قيم زوايا الرباعي ABCD.

23 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مبدؤه O. (الوحدة 1cm).

A، B، C ثلاث نقط بحيث $A(-3;1)$ ، $B(3;5)$ ، $C(5;2)$

1) علّم النقط A، B، C.

2) ما نوع المثلث ABC؟

3) علّم النقطة D بحيث $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ ثمّ احسب إحداثيتي النقطة D.

4) ما نوع الرباعي ABCD؟

5) احسب مساحة الرباعي ABCD.

6) $\vec{u}$ شعاع حيث $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. الرباعي $A'B'C'D'$ هو صورة الرباعي ABCD بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$. استنتج إحداثيتي كل رأس من رؤوس الرباعي $A'B'C'D'$.

24 المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) علّم النقط: $A(1;2)$ ، $B(3;4)$ ، $C(5;2)$ ، $D(3;0)$.

2) بيّن أنّ القطعتين [AC] و [BD] نفس الطول ونفس المنتصف ثم استنتج نوع الرباعي ABCD.

3) أحسب مركبتي كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ ثم أحسب الطولين AC و BD.

4) استنتج أنّ $(BD) \perp (AC)$.

25 من امتحان شهادة التعليم المتوسط

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) علّم النقط: $A(-2;-3)$ ، $B(4;1)$ ، $C(2;4)$.

2) أ) أعط القيمة المضبوطة للطول AB.

ب) علما أنّ: $AC = \sqrt{65}$ و $BC = \sqrt{13}$ ، بيّن أنّ المثلث ABC قائم.

3) أنشئ النقطة E صورة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ ، أثبت أنّ ABCE مستطيل.

26 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مبدؤه O .(الوحدة 1cm).

نعتبر النقط $A(2;-2)$ ، $B(-3;3)$ ، $C(-4;-3)$.

1) احسب القيم المضبوطة للأطوال AB ، BC ، AC

2) ما نوع المثلث ABC؟

3) احسب إحداثيتي النقطة D بحيث $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$

4) بيّن أن $(AB) \perp (CD)$.

5) ماذا يمثّل الجداء $\frac{1}{2} \times AB \times CD$ بالنسبة للرباعي ABCD.

27 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مبدؤه O .(الوحدة 1cm).

نعتبر النقط $A(-3;1)$ ، $B(1;4)$ ، $C(4;0)$.

1) علّم النقط A، B، C. ما نوع المثلث ABC؟

2) D هي صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$

أ) علّم النقطة D، احسب إحداثيتي النقطة D.

ب) أثبت أنّ الرباعي ABCD مربع.

استعمال برمجية جيوجبرا في تمثيل شعاع و قراءة مركبتيه أو وضع تخمين

تمثيل شعاع بمعرفة مركبتيه

حرف كبير مثل A يدل على نقطة و حرف صغير مثل u يدل على شعاع.

• أ)احجز Saisie A=(2,1) و انقر على Enter لتظهر النقطة A التي إحداثياتها (2 ; 1).

ب)احجز Saisie B=(4,3) و انقر على Enter لتظهر النقطة B التي إحداثيتاها (4 ; 3).

جـ)انقر على و اختر Vecteur و انقر على النقطة A ثم على B فيظهر الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

• احجز Saisie u=(-1,2) و انقر على Enter ليظهر الشعاع u′ الذي مركبتاه $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

قراءة مركبتي شعاع

• احجز نقطتين A و B ثم احجز Saisie: Polygone(A, B, 4) فيظهر مربع نسميه ABCD .

• انقر على و اختر Symétrie centrale ثم انقر على A وعلى B فتظهر نقطة A′ نظيرة A بالنسبة إلى النقطة B.

حدد الأشعة $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{DB}$، $\overrightarrow{A'A}$ ثم اقرأ مركبتي كل منها في النافذة الجبرية .

وضع تخمين

• ارسم ثلاث نقط A(2 ; 1)، B(8 ; 2)، C(6 ; 4).

• انقر على و اختر Milieu ou centre ثم انقر على A و B ثم على B و C ثم على C و D فتظهر النقط D، E، F.

• انقر على و اختر Droite ثم انقر على C و D ثم على B و F ثم على A و E فتظهر ثلاثة مستقيمات.

• انقر على و اختر Intersection ثم انقر على المستقيمين (AE) و (BF) فتظهرنقطة G.

• احجز Saisie: s=Vecteur(G, A)+Vecteur(G, B)+Vecteur(G, C)

•حرك النقط A، B، C. ماذا تلاحظ في النافذة الجبرية؟ ضع تخمينا.

دوري الآن

علّم في مَعلَم متعامد ومتجانس مبدؤه O، علّم النقط A(1 ; 1)، B(4 ; 1)، C(4 ; 4)، D(1 ; 4).
نرمز لمنتصف [AC] بالرمز E. اختر نقطة F تختلف عن النقط السابقة.
ارسم F′ نظيرة F بالنسبة إلى E ثم F_1' نظيرة F بالنسبة إلى F′.
نضع $\vec{u} = \overrightarrow{FF_1'}$ و $\vec{V} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD}$. عيّن مركبتي $\vec{U}$ و $\vec{V}$.
حرك النقطة F، ماذا تلاحظ؟ ضع تخمينا.

13 الدّوران - الزوايا - المضلّعات المنتظمة

سأتعلم في هذا الباب

- إنشاء صورة كل من: نقطة، قطعة مستقيم، مستقيم، نصف مستقيم و دائرة بدوران.
- معرفة خواص الدوران و توظيفها.
- التعرف على الزاوية المركزية و الزاوية المحيطية.
- معرفة العلاقة بين الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية اللتين تحصران نفس القوس و استعمالها.
- إنشاء مضلعات منتظمة (مثلث متقايس الأضلاع، مربع، سداسي منتظم).

مصادفة الدقة الرياضياتية و البساطة الهندسية ليست محصورة فقط في أذهان الرياضياتيين و الكتب العلمية، إنها متواجدة في محيطنا أو هي مخفية في أركان الطبيعة.

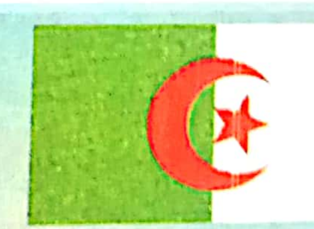
نجمة البحر

يمكن القول إنّ المثلثات و المربعات و الخماسيات ليست الوحيدة المتواجدة في الطبيعة.

بالنسبة إلى المثلث المتقايس الأضلاع، يمكن مصادفة هذا الشكل في الطحالب المجهرية المتواجدة في مياه المحيطات و البحار، بينما المربع، فهو متواجد في العالم الجيولوجي و الكيمياوي مثل بلورات الملح المكعبة. يعتبر الخماسي المنتظم شكلا نادرا جدا، و هذا الشكل يمكن تشكيله من رؤوس نجمة بحرية.



أنشئ على ورق غير مرصوف تصميما لنجمة العلم الجزائري بحيث تكون المسافة بين كل رأسين متتاليين من هذه النجمة تساوي 10cm.



أستعد

أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

1) المثلث ABC المقابل متقايس الأضلاع.

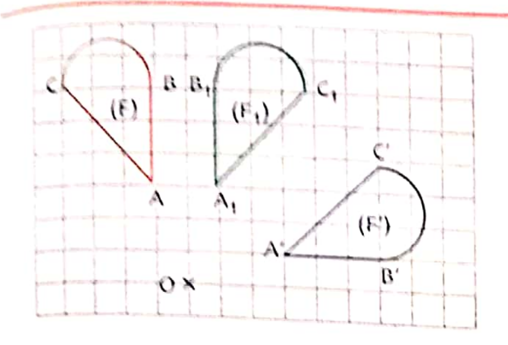
2) المثلث ABC المقابل متقايس الأضلاع..

3) في الشكل المقابل، قيس الزاوية $\widehat{zOy}$ هو $55°$.

4) في الشكل المقابل
- (E) هي الدّائرة المحيطة بالمثلث ABD.
- (E) هي الدّائرة المحيطة بالمثلث BCD.

5) في الشكل المقابل
- (E) هي الدّائرة المحيطة بالمثلث MNP.
- (E) هي الدّائرة المحيطة بالمثلث ONM.

1 مقاربة تجريبية للدوران



لاحظ الأشكال (F)، (F_1)، (F') المقابلة.

1) أ) كيف نحصل على الشّكل (F_1) انطلاقا من الشّكل (F)؟

ب) كيف نحصل على الشّكل (F') انطلاقا من الشّكل (F_1)؟

جـ) هل يمكن رسم الشّكل (F') انطلاقا من الشّكل (F) بطريقة مماثلة لما وجدت في الجزأين أ) و ب)؟ اشرح.

2) انقل الشّكل (F) والنقطة O على ورق شفاف، ثمّ ثبّته بوضع إبرة المدور على النقطة O، ودوّر الورق الشفاف في اتجاه حركة عقارب الساعة حتى ينطبق الشّكل (F) على الشّكل (F').

- على أيّ نقطة تنطبق النقطة A؟ والنقطة B؟ والنقطة C؟

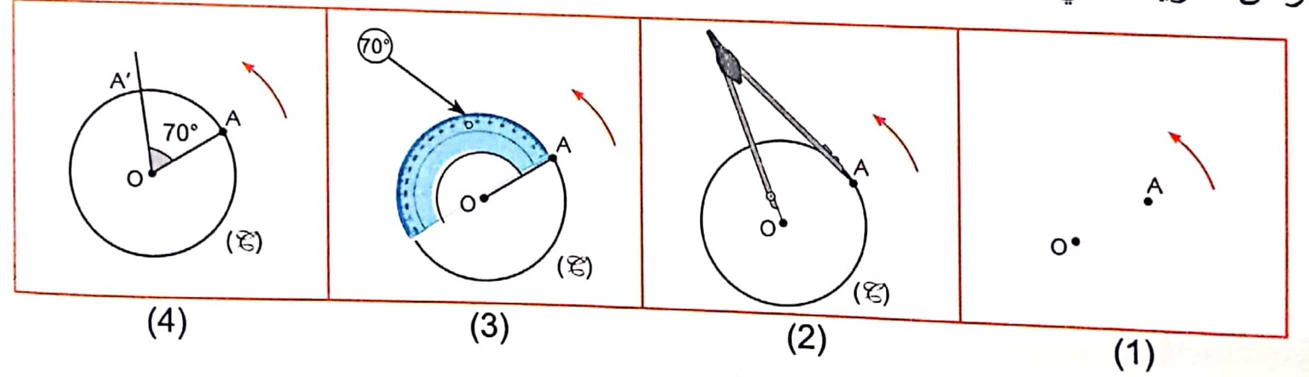
نقول إنّ النقطة A' هي صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\widehat{AOA'}$.

- قارن بين كل طولين: OA و OA'، OB و OB'، OC و OC'.
- تحقّق من أنّ $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'}$.

انقل ما يلي وأتمم: «نتحصّل على الشّكل (F') انطلاقا من الشّكل (F) بـ ... مركزه النقطة ... وزاويته...»

2 إنشاء صورة نقطة بدوران

يعرض الشريط التالي مراحل إنشاء صورة نقطة A بالدوران مركزه O وزاويته $70°$ في اتجاه السّهم.



1) صِفْ مراحل الإنشاء التي يعرضها الشريط أعلاه. 2) نفذ البرنامج الذي وصَفته في السؤال 1).

3) عيّن نقطة أخرى B تختلف عن O و A وأنشئ صورتها بهذا الدوران.

3 صور بعض الأشكال الهندسية بدوران

في كل ما يلي، O مركز الدوران الذي زاويته $72°$ في الاتجاه المباشر.

ننشئ صورة كل شكل من الأشكال الآتية :

أ) قطعة مستقيم: $[AB]$ قطعة مستقيم.أنشئ A' و B' صورتي A و B بهذا الدوران.

ماهي صورة القطعة $[AB]$ بهذا الدوران؟

ب) مستقيم: (d) مستقيم و A نقطة من (d).

A B O

(d) O A

الحالة الأولى: O تنتمي إلى (d).

A تختلف عن O. أنشئ O′ و A′ صورتي O و A بهذا الدوران. استنتج صورة (d).

الحالة الثانية: O لا تنتمي إلى (d).

قالت غنيمة: «لإنشاء صورة (d)، يكفي إنشاء صورة نقطتين مختلفتين من (d) بهذا الدوران». هل توافقها؟ اشرح.

A و B نقطتان مختلفتان من (d). A′ و B′ صورتا A و B بهذا الدوران على الترتيب.

أنشئ A′ و B′ ثم صورة (d) بنفس الدوران.

جـ) نصف مستقيم: [Ax) نصف مستقيم، أنشئ A′ و B′ صورتا A و B بنفس الدوران

ثم استنتج صورة نصف مستقيم [Ax).

د) دائرة: ($\mathscr{C}$) هي دائرة مركزها W و A نقطة من ($\mathscr{C}$).

أنشئ W′ و A′ صورتي W و A بنفس الدوران. استنتج ($\mathscr{C}'$) صورة ($\mathscr{C}$) بهذا الدوران.

4 الزاوية المركزية والزاوية المحيطية

($\mathscr{C}$) هي دائرة مركزها النقطة O، A و B نقطتان من ($\mathscr{C}$).

ارسم الزاوية $\widehat{AOB}$. ماذا تلاحظ بالنسبة إلى رأسها O؟

الزاوية $\widehat{AOB}$ تسمى زاوية مركزية في الدائرة ($\mathscr{C}$).

D نقطة من ($\mathscr{C}$) خارج القوس الملونة $\overset{\frown}{AB}$.

ارسم الزاوية $\widehat{ADB}$. ماذا تلاحظ بالنسبة إلى رأسها D؟

الزاوية $\widehat{ADB}$ هي زاوية محيطية في ($\mathscr{C}$) التي تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$ و $\widehat{AOB}$ زاوية مركزية في ($\mathscr{C}$) التي تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$. نقول إنّ الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ والزاوية المحيطية $\widehat{ADB}$ تحصران نفس القوس.

1) يقول مزيان: «إذا كان [AD] قطرًا في ($\mathscr{C}$)، فإنّ $\widehat{AOB} = 2\widehat{ADB}$»

هل هذا القول صحيح؟ اشرح.

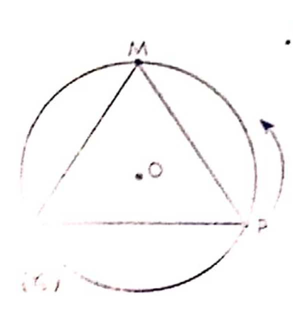
أ) تحقق أنّ $\widehat{AOB} + 2\widehat{BAD} = 180°$ وأنّ $\widehat{ADB} + \widehat{BAD} = 90°$ ب) استنتج قيمة $\widehat{AOB}$ بدلالة $\widehat{ADB}$.

2) تضيف زميلته هوارية: « تبقى هذه العلاقة صحيحة إذا كان [AD] و [BD] وتران كيفيان في ($\mathscr{C}$).

هل هي على صواب؟ برّر إجابتك.

5 المضلعات المنتظمة

• **المثلث المتقايس الأضلاع:** انقل المثلث متقايس الأضلاع MPN والدائرة المحيطة به.



أ) ارسم الزاوية المركزية التي تحصر مع الزاوية $\widehat{NMP}$ نفس القوس، وعيّن قيسها.

ب) أعد نفس العمل مع كل من الزاويتين $\widehat{MNP}$ و $\widehat{MPN}$.

جـ) حدّد مركز وزاوية الدوران الذي يحول P الى M،

وعيّن صورة كل من النقطتين M و N بهذا الدوران.

1 الدوران

تعريف

تحويل شكل بدوران هو تدويره بزاوية معيّنة حول نقطة ثابتة وفي اتجاه معيّن.

ملاحظة

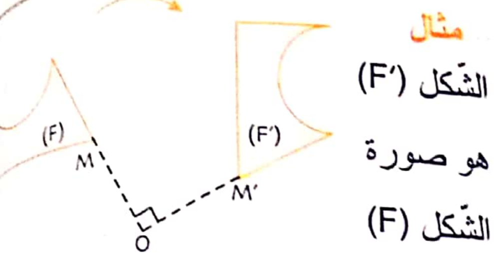
يتميّز الدوران بزاوية واتجاه ومركز هو النقطة التي دوّرنا حولها. (الشّكل)

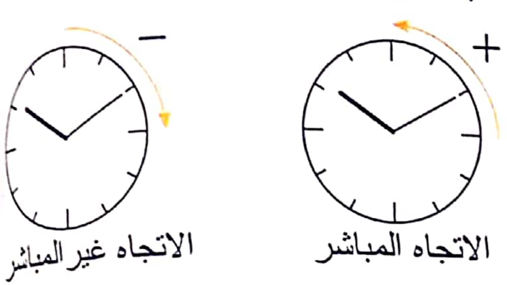
اصطلاح

يُسمّى الاتجاه المعاكس لاتجاه عقارب الساعة **الاتجاه المباشر** أو **الاتجاه الموجب**.
كما يُسمّى الاتجاه الآخر **الاتجاه غير المباشر** أو **الاتجاه السالب**.

مثال

الشّكل (F′) هو صورة الشّكل (F) بالدوران الذي مركزه O وزاويته 90°، في اتجاه حركة عقارب الساعة.





2 صورة نقطة بدوران علم مركزه وقيس زاويته

تعريف

O نقطة معلومة و α زاوية.
صورة نقطة M تختلف عن O بالدوران الذي مركزه O وزاويته α في اتجاه معيّن هي النقطة M′
حيث OM′ = OM و $\widehat{MOM'} = \alpha$

ملاحظة صورة نقطة O بالدّوران الذي مركزه O هي النقطة O نفسها.

حالة خاصة

الدّوران الذي مركزه O وزاويته 180° هو التناظر بالنسبة إلى النقطة O.

مثال

على الشّكل المقابل A′ صورة A بالدّوران الذي مركزه O وزاويته 35° في الاتجاه المباشر.
M′ هي صورة M بنفس الدّوران
حيث OM′ = OM و $\widehat{MOM'} = \alpha$

مثال

النقطة M′ هي صورة النقطة M:
- بالدوران الذي مركزه O وزاويته 180°.
- بالتناظر الذي مركزه O.

3 خواص الدّوران

خاصية

الدّوران يحافظ على :
- الأطوال
- استقامية النقط
- الزوايا
- المساحات

مثال

A′، B′، C′ هي، على الترتيب، صور النقط A، B، C بالدّوران الذي مركزه O وزاويته 20° في الاتجاه المباشر.
إذا كان AB = 2cm فإن A′B′ = 2cm.
A، B، C على استقامية واحدة إذن A′، B′، C′ على استقامية.

• إنشاء صور أشكال هندسية

تمرين 1

O، A نقطتان متمايزتان. أنشئ A' صورة النقطة A بالدّوران الذي مركزه O و زاويته $50°$ في الاتجاه المباشر.

حل

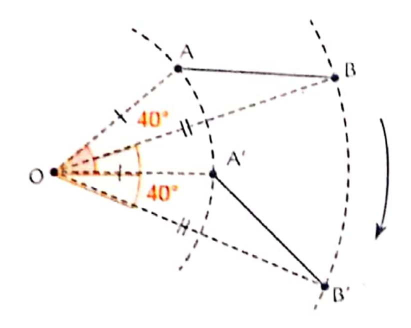
- رسم نصف المستقيم $[OA)$.
- نستعمل منقلة ومسطرة ونرسم $[Ox)$ حيث $\widehat{AOx} = 50°$ في الاتجاه المباشر.
- نستعمل المدور لتعيين النقطة A' على نصف المستقيم $[Ox)$ حيث $OA = OA'$.



تمرين 2

انقل الشكل المعطى، وأنشئ صورة القطعة $[AB]$ بالدّوران الذي مركزه O وزاويته $40°$ في الاتجاه غير المباشر.

حل



- ننشئ A' صورة A و B' صورة B بالدّوران الذي مركزه O وزاويته $40°$ في الاتجاه السالب.
- نرسم القطعة $[A'B']$.

القطعة $[A'B']$ هي صورة $[AB]$ بالدّوران المعطى.

طريقة

لإنشاء صورة قطعة مستقيم بدوران، يكفي إنشاء صورتي طرفيها ورسم قطعة المستقيم المحدّدة بالصورتين.

• استعمال خواص الدّوران في الإنشاءات

تمرين

OAB و OCD مثلثان كل منهما قائم ومتساوي الساقين.

- بيّن أن $[BD]$ هي صورة $[AC]$ بدوران يُطلب تعيين مركزه وزاويته.
- استنتج أنّ $AC = BD$ و $(BD) \perp (AC)$.



حل

- بما أن OAB قائم ومتساوي الساقين، فإنّ B هي صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $90°$.

وكذلك فإنّ D هي صورة C بنفس الدوران.

ومنه فإنّ $[BD]$ هي صورة $[AC]$ بالدوران الذي مركزه O وزاويته $90°$.

- ومن خواص الدوران نستنتج أنّ $AC = BD$ و كذلك $(BD) \perp (AC)$.

دوري الآن

$\widehat{AOB}$ زاوية قيسها $45°$.

أنشئ صورة هذه الزاوية بالدوران الذي مركزه K و زاويته $60°$ في الاتجاه المباشر.

4 الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية في دائرة

تعريف

(ج) دائرة مركزها O.

- نُسمّي **زاوية مركزية** في الدائرة (ج) كل زاوية رأسها المركز O.
- نُسمّي زاوية **زاوية محيطية** في الدائرة (ج) كل زاوية رأسها تنتمي إلى الدائرة (ج)، وضلعاها يقطعان الدائرة (ج).

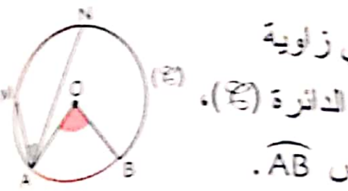
خاصية 1

قيس الزاوية المحيطية في دائرة، هو نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر معها نفس القوس

خاصية 2

إذا كانت زاويتان محيطيتان في دائرة تحصران القوس نفسه فهما متقايستان.

مثال 1



- $\widehat{AOB}$ هي زاوية مركزية في الدائرة (ج). تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$.
- $\widehat{MAN}$ هي زاوية محيطية في الدائرة (ج) تحصر القوس $\overset{\frown}{MN}$.

مثال 2

- بما أنّ $\widehat{AOB}$ زاوية مركزية و $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية وتحصران القوس $\overset{\frown}{AB}$ نفسه.

فإنّ $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

مثال 3

- بما أنّ $\widehat{ANB}$ و $\widehat{AOB}$ زاويتان محيطيتان وتحصران القوس $\overset{\frown}{AB}$ نفسه.

فإنّ $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

5 المضلعات المنتظمة

تعريف

نسمّي **مضلعا منتظما** كل مضلّع أضلاعه كلّها لها نفس الطول وزواياه كلّها متقايسة.

خاصية 1

توجد دائرة تشمل كل رؤوس مضلع منتظم، تُسمّى **الدائرة المحيطة** بهذا المضلع ويُسمى مركزها مركز **المضلع المنتظم**.

خاصية 2

الزوايا المركزية التي كل منها تحصر ضلعا في مضلع منتظم متقايسة، وكل منها تساوي $\left(\frac{360°}{n}\right)$ حيث n عدد أضلاع المضلّع.

خاصية 3

إذا كان [AB] ضلعا في مضلع منتظم مركزه O، فإن صورة هذا المضلع بالدّوران الذي مركزه O وزاويته $\widehat{AOB}$ هو المضلع نفسه.

مثال

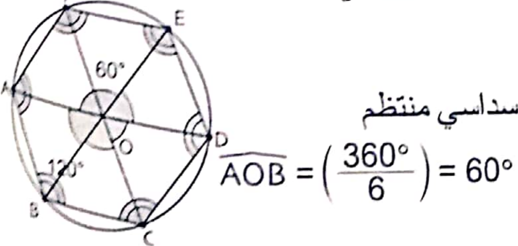
مثلث متقايس الأضلاع

$\widehat{AOB} = \left(\frac{360°}{3}\right) = 120°$

مربع

$\widehat{AOB} = \left(\frac{360°}{4}\right) = 90°$

سداسي منتظم

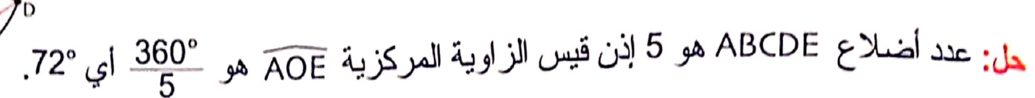


$\widehat{AOB} = \left(\frac{360°}{6}\right) = 60°$

• حساب قيس زاوية مضلع منتظم

تمرين: ABCDE خماسي منتظم مركزه O.

ما هو قيس الزاوية $\widehat{BAE}$.



حل: عدد أضلاع ABCDE هو 5 إذن قيس الزاوية المركزية $\widehat{AOE}$ هو $\frac{360^\circ}{5}$ أي 72°.

المثلث AOE متساوي الساقين رأسه الأساسي هو O إذن $\widehat{OAE} = \widehat{OEA} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$

نستنتج عندئذ أن $\widehat{BAE} = 2 \times \widehat{OAE} = 2 \times 54^\circ$ أي $\widehat{BAE} = 108^\circ$

• إنشاء مضلع منتظم عُلم طول ضلعه

تمرين: أنشئ خماسيًّا منتظما ABCDE حيث $AB = 3cm$.

حل: لدينا $AB = AE$ و $\widehat{BAE} = 108^\circ$ (التمرين السابق)

إذن يمكن إنشاء النقطة E صورة B بالدّوران الذي مركزه A و زاويته 108°.

ننشئ المستقيم (D_1) محور $[AB]$ و المستقيم (D_2) محور $[AE]$.

(D_1) و (D_2) متقاطعان في نقطة O و $OA = OB = OE$.

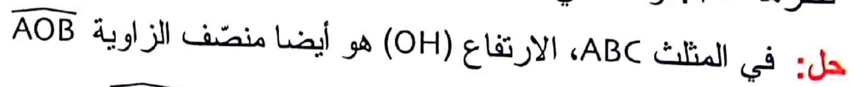
O هي مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث ABE و هي مركز ABCDE.

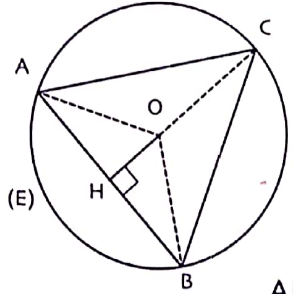
ثم ننشئ الرأسين C و D بالمدور بحيث $BC = CD = AB$.



• حساب طول ضلع مضلع منتظم عُلم نصف قطر الدّائرة المحيطة به

تمرين: ABC مثلث متقايس الأضلاع و (E) الدّائرة المحيطة به، مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{3}$. الوحدة هي السنتيمتر. احسب القيمة المضبوطة لطول ضلع هذا المثلث.





حل: في المثلث ABC، الارتفاع (OH) هو أيضا منصّف الزاوية $\widehat{AOB}$ و محور القطعة [AB]. لدينا $\widehat{ACB} = 60^\circ$ إذن $\widehat{AOB} = 120^\circ$

و منه $\widehat{HOA} = 60^\circ$.

في المثلث OAH القائم في H، لدينا $\widehat{OAH} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

لدينا $\cos \widehat{OAH} = \frac{AH}{OA} = \frac{AH}{\sqrt{3}}$ أي $\cos 30^\circ = \frac{AH}{\sqrt{3}}$ أي $AH = \sqrt{3} \times \cos 30^\circ$

و نستنتج أن $AH = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ لدينا $AB = 2 \times AH = 3$ إذن $AB = 3cm$.

دوري الآن

ABCDEFG سباعي منتظم مركزه O.

احسب القيمة المضبوطة للزاوية $\widehat{AOB}$ ثم للزاوية $\widehat{ABC}$. عيّن المدوّر إلى الوحدة لكل منهما.

صورة شكل بدوران

1 [OD]، [OC]، [OB]، [OA] قطع مستقيم متقايسة (الشكل).

1) ما هي صورة OC بالدوران الذي مركزه O وزاويته 95° في الاتجاه المباشر؟

2) ما هي صورة OD بالدوران الذي مركزه O وزاويته 230° في الاتجاه المباشر؟

3) ما هي قطعة المستقيم التي صورتها OC بالدوران الذي مركزه O وزاويته 265° في الاتجاه المباشر؟

2 الشكل الآتي يتكون من أربعة مثلثات.

1) الدوران الذي مركزه O و زاويته 90° يحوّل المثلث ① إلى المثلث ② في الاتجاه غير المباشر. ما هي صورة المثلث ② وصورة المثلث ④ بهذا الدوران؟

2) ما هو مركز و زاوية و اتجاه الدوران الذي يحوّل المثلث ① إلى المثلث ④ ؟ المثلث ① إلى المثلث ③؟ المثلث ④ إلى المثلث ② ؟

3 A و B نقطتان كيفيتان.

1) أنشئ C صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته 50° في اتجاه عقارب الساعة.

2) أنشئ D صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته 139° في اتجاه عقارب الساعة.

3) ما هو قيس الزاوية $\widehat{CAD}$.

4 ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين.

1) أنشئ A′ صورة A بالدوران الذي مركزه B وزاويته 90° في الاتجاه غير المباشر.
هل ABA′C مربع؟ لماذا؟

2) أنشئ صورة المثلث بالدوران الذي مركزه C وزاويته 45° في الاتجاه المباشر.

5 لاحظ الشكل التالي:

أتمم ما يلي:

1) المثلث AMN صورة ABD بالدوران الذي مركزه ... و زاويته ...في الاتجاه... .

2) المثلث APQ صورة ABD بالدوران الذي مركزه ... و زاويته ...في الاتجاه... .

3) المثلث ARS صورة ABD بالدوران الذي مركزه ... و زاويته ...في الاتجاه... .

4) المثلث AEF صورة AMN بالدوران الذي مركزه ... و زاويته ...في الاتجاه... .

6 A و B نقطتان كيفيتان.

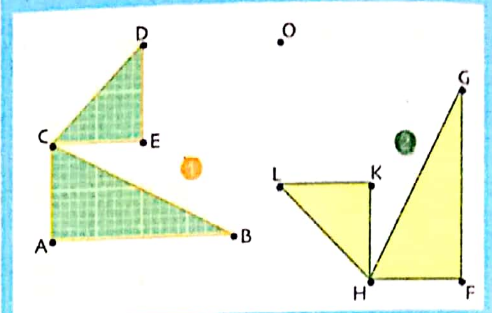
C هي صورة B بالدّوران الذي مركزه A و زاويته 90° في الاتجاه المباشر.

M نقطة تنتمي إلى [AC].

N هي صورة M بالدّوران الذي مركزه A و زاويته 90° في الاتجاه المباشر.

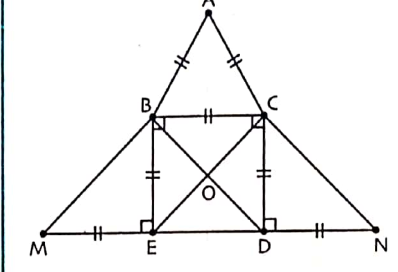
برهن أن BM = CN.

7 لاحظ في الشكلين الآتيين، **2** صورة **1** بدوران مركزه O.



عيّن زاوية و اتجاه هذا الدّوران.

8 لاحظ الشكل التالي:



انقل و أتمم ما يلي:

1) B هي صورة C بالدوران الذي مركزه... و زاويته... في الاتجاه... .

2) E هي صورة B بالدوران الذي مركزه O وزاويته ...في الاتجاه ... .

3) D هي صورة E بالدوران الذي مركزه ... وزاويته 90° في الاتجاه... .

4) M هي صورة D بالدوران الذي مركزه... وزاويته... في الاتجاه... .

5) M هي صورة B بالدوران الذي مركزه ... وزاويته... في الاتجاه... .

9 ABC مثلث متقايس الأضلاع مركزه O.

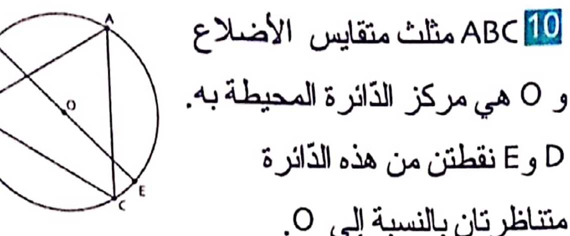
1) أنشئ صورة ABC بالدوران الذي مركزه O وزاويته 45° في الاتجاه المباشر.

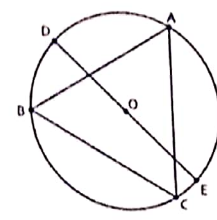
نسمي 'A، 'B، 'C صور الرؤوس A، B، C، على الترتيب، بهذا الدّوران.

2) هل يمكن أن يكون المثلث 'A'B'C صورة ABC بدورانات أخرى؟ اشرح.

الزوايا المحيطية و الزوايا المركزية

10 ABC مثلث متقايس الأضلاع و O هي مركز الدّائرة المحيطة به. D و E نقطتن من هذه الدّائرة متناظرتان بالنسبة إلى O.

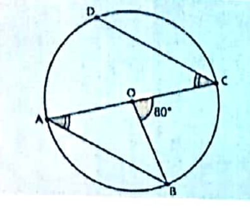




عيّن أقياس الزوايا : $\widehat{BOC}$ ، $\widehat{BDC}$ ، $\widehat{DAB}$ و $\widehat{DBC}$.

11 لاحظ الشكل التالي:

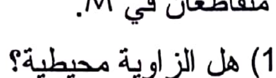
برهن أن النقط O، B و D على استقامية.



12 لاحظ الشكل أدناه :

(P) دائرة مركزها O و [BD] قطر لها.

(AB) و (CD) مستقيمان متقاطعان في M.



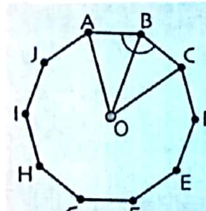
1) هل الزاوية محيطية؟

2) برهن أن $\widehat{AMD} = \widehat{CDB} + \widehat{ABD}$.

3) برهن أن $\widehat{CMB} = \dfrac{\widehat{COB} + \widehat{AOD}}{2}$.

المضلعات المنتظمة

13 ABCDEFGHIJ عشاري منتظم مركزه O. احسب القيمة المضبوطة للزاوية $\widehat{AOB}$ ثم للزاوية $\widehat{ABC}$.



14 ABCDEFGH ثماني منتظم مركزه O حيث $OA = \sqrt{8}$ (الوحدة هي cm)

1) عيّن قيس الزاوية $\widehat{ABC}$.

2) لماذا (BH) يعامد(OA) في L؟

3) قارن $\sin\widehat{BOL}$ و $\cos\widehat{BOL}$ ثم احسب sin45° و cos45°.

4) احسب OL و BL.

5) احسب مساحة ABCDEFGH.

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة		الإجابات (1)	(2)	(3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	في الشكل أدناه: بالدوران الذي مركزه O و زاويته 60° في الاتجاه المباشر (A، B، C، D، O، 60°)	صورة A هي	B	C	D	155 , 154
		صورة D هي	B	C	A	
		صورة O هي	A	O	C	
2	في الشكل الآتي (A، B، C، D، O، E)		الزاوية $\widehat{BAC}$ محيطية و الزاوية $\widehat{BOC}$ مركزية مرفقة بها	الزاوية $\widehat{BDC}$ محيطية و الزاوية $\widehat{BEC}$ مركزية مرفقة بها	الزاوية $\widehat{BDC}$ محيطية و الزاوية $\widehat{BAC}$ مركزية مرفقة بها	156
3	في الشكل الآتي (A، B، C، O)		$\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$	$\widehat{BAC}=2\widehat{BOC}$	$\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$	156
4	المضلع الآتي (A، B، C، D، E)		خماسي منتظم	خماسي غيرمنتظم	ليس خماسيا	156

أدمج تعلّماتي

وضعية

لإضافة لمسة جمالية على الحديقة العمومية للبلدية ارتأت المصلحة المعنية تخصيص حيّز دائريّ نصف قطره 3m لغرس الأزهار على أن تحيط به 6 أعمدة كهربائية متباعدة بنفس المسافة.

اقترح مخططا لوضع هذه الأعمدة على محيط الحيز، مُحدّدا المسافة بين كل عمودين.

تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وفهمها: • ما هو شكل الجزء المخصص لزراعة الأزهار؟ • كيف توضع الأعمدة الكهروبائية؟

تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل مناسبة: • ماهي المهمة المطلوب إنجازها؟ كيف سيتم ذلك؟

• ماذا يلزم لاختيار موقع الأعمدة؟ • ما هي المسافة التي تفصل بين عمودين متتاليين؟

تنفيذ استراتيجية الحل المختارة: • نختار مقياس مناسب، ثم نُنشئ مضلعا منتظما بحيث يكون كل رأس من المضلع هو موقع عمود إنارة.

15 A و B نقطتان حيث $AB = 4cm$.

C هي صورة B بالدّوران الذي مركزه A

و زاويته $72°$ في الاتجاه المباشر.

D هي صورة C، E صورة D و F صورة E

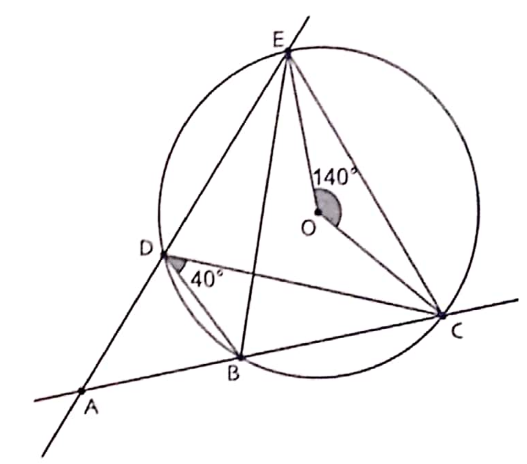
بالدوران السابق.

1) احسب FB.

2) برهن أن المضلع ABCDEF منتظم.

3) احسب مساحة الدّائرة المحيطة بـ ABCDEF.

16 لاحظ الشكل التالي:



عيّن أقياس زوايا المثلث AEC.

17 من امتحان شهادة التعليم المتوسط

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) علّم النقط: $A(0\,;4)$، $B(-3\,;1)$، $C(5\,;-1)$.

2) احسب إحداثيتي النقطة E منتصف القطعة [BC].

3) أنشئ النقطة D صورة A بالدوران الذي مركزه E وزاويته $180°$ ثم استنتج إحداثيتي D.

4) بيّن أن الرباعي ABCD مستطيل.

18 لاحظ الشكل التالي:

1) [A'B'] هي صورة [AB] بدوران مركزه O. أنشئ O.

2) المثلث M'N'P' هو صورة المثلث MNP بدوران مركزه W. أنشئ W.

19 محيط السداسي المنتظم ABCDEF المقابل هو 96m.

1) أحسب طول ضلع منه.

2) [OH] هو ارتفاع في المثلث المتقايس الأضلاع OBC.

- بيّن أنّ $OH = 8\sqrt{3}m$.

3) احسب المساحة المضبوطة للمثلث AOB ثم استنتج S مساحة السداسي المنتظم ABCDEF.

4) احسب النسبة $\frac{S}{S'}$ حيث S' هي مساحة القرص الذي مركزه O ونصف قطره OA.

20 من امتحان شهادة التعليم المتوسط

(T) دائرة مركزها O وقطرها $AB = 8cm$، C نقطة من الدائرة حيث: $BC = 3cm$.

1) احسب بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة قيس الزاوية $\widehat{BAC}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{BOC}$.

2) F هي صورة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$، المستقيم الذي يشمل F ويوازي (BC) يقطع (AC) في D.

- أحسب DF.

ملاحظة: يُطلب إنجاز الشكل الهندسي.

استعمل برنامج جيوجيبرا للإجابة على أسئلة التمرين الآتي:

1) أنشئ الشكل المقابل.

2) هل يوجد دوران مركزه ″B و يحوّل النقطة A إلى B؟

في حالة الإيجاب عيّن زاويته و اتجاهه.

3) أنشئ ثُمانيًا منتظمًا.

حل

1) إنشاء الشكل

• أنشئ قطعة مستقيم [AB] باستعمال و Segment .

• انقر على و اختر Rotation و أنقر على A ثم على B و احجز في النافذة الظاهرة 90° و اختر Sens anti horaire .

تتحصل عندئذ على النقطة ′B صورة B بالدّوران الذي مركزه A و زاويته 90° في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

• بنفس الطريقة، أنشئ النقطة ′A صورة A بالدّوران الذي مركزه ′B و زاويته 90° في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

• استعمل و Segment لإتمام إنشاء المربع ′ABA′B.

• بنفس الكيفية، أنشئ النقطة ″B صورة ′B بالدّوران الذي مركزه ′A و زاويته 60° في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.أكمل إنشاء المثلث المتقايس الأضلاع ′B′B″A.

2) دوران يحوّل النقطة B إلى A.

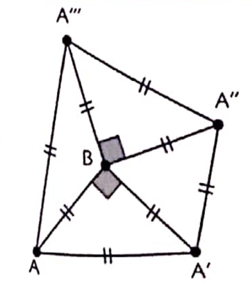
• تأكد أن B″A = B″B بالنقر على وعلى Relation a=b ثم على القطعة [B″A] و على القطعة [B″B]. إذن يوجد دوران مركزه ″B ويحوّل B إلى A.

• انقر على واختر Angle ثم انقر على A، ″B، B بهذا الترتيب فتظهر زاوية قيسها 150° في الاتجاه المباشر.

3) إنشاء ثُماني

انقر على و اختر Polygone régulier ثم انقر على A وعلى B و احجز «8» في النافذة الظاهرة. هكذا تتحصل على الثُماني ABCDEFGH.

دوري الآن



1) أنشئ الشكل المقابل.

2) بأي دوران تكون النقطة ‴A صورة ″A و النقطة ′A صورة A؟

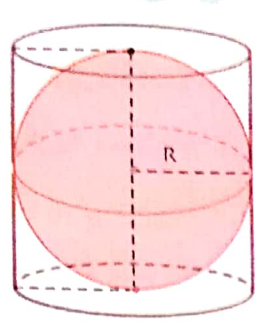
3) تأكد أن (A‴A′) ⊥ (AA″) باستعمال الأيقونة Relation a=b .

5) أنشئ الخماسي ABCDE.

14 الهندسة في الفضاء

سأتعلم في هذا الباب

- التعرف على الكرة و الجلة.
- تمثيل الكرة.
- حساب مساحة الكرة و حجم الجلة.
- معرفة و استعمال المقاطع المستوية للمجسمات المألوفة.
- معرفة الآثار على مساحة و حجم مجسم عند تكبير أو تصغير أبعاد هذا المجسم.



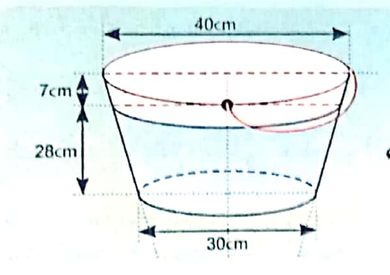
أرخميدس (287 ق م - 212 ق م) هو عالم رياضيات وفيزياء ومخترع. أبرز اكتشافاته قانون طفو الأجسام والذي ينص على أنّ وزن الجسم المغمور بالمياه يُساوي كميّة الماء المُزاح. ومن أشهر اكتشافاته طُرق حساب المساحات والحجوم، حيث اعتمد على استبدال الشكل الأصلي بأشكال يعلم حساب مساحتها أو حجمها وتكون مقرّبة كثيرا من الشكل الأصلي.

وُضعت كُرة نصف قطرها R داخل أسطوانة ارتفاعها 2R ونصف قطر قاعدتها R (انظر الشكل). توصّل أرخميدس في هذه الوضعية إلى أنّ مساحة الكُرة تُساوي المساحة الجانبية للأسطوانة وأنّ حجم الكرة يُساوي ثُلثي حجم الأسطوانة.

تحدّ

يُمثّل الشكل المقابل دلوًا فيه ماء، وهو ناتج من مخروط مبتور.

إذا علمت أنّ مستوى الماء يبعد عن الحافة العُلوية للدلو بـ 7cm، فاحسب حجم الماء المُحتوى في هذا الدلو.



أستعد

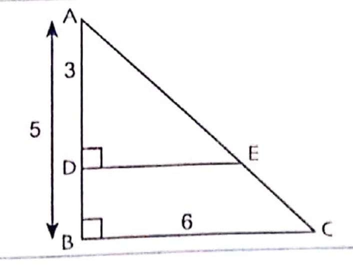
أصحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك.

1) محيط دائرة نصف قطرها 3cm هو 6cm.

2) مساحة قرص نصف قطره 3cm هو $(9\pi)cm^2$.

3) في الشكل المقابل، المثلثان ABC و ADE في وضعية طالس.

إذن $\frac{DE}{6} = \frac{3}{5}$.



4) حجم مكعب طول حرفه 2cm هو $6cm^3$.

5) حجم متوازي مستطيلات أبعاده 2cm، 3cm و 4cm هو $24cm^3$.

6) حجم أسطوانة دوران نصف قطر قاعدتها 2cm وارتفاعها 2cm هو $(4\pi)cm^3$.

7) حجم مخروط دوران نصف قطر قاعدته 2cm وارتفاعها 2cm هو $(4\pi)cm^3$.

8) حجم هرم قاعدته مربع طول ضلعه 3cm وارتفاعه 3cm هو $9cm^3$.

1 الكــــرة والجُلّــــة

1) ميّز بين نقاط دائرة ونقاط قرص لهما نفس المركز ونصف قطر كل منهما 4cm.

2) الكرة المستعملة في رياضة كرة اليد هو مجسّم كُروي أجوف، إنّه نموذج لكائن رياضياتي يُسمّى الكُرة. بينما الكُرية المستعملة في رياضة الكرة الحديدية هي مُجسّم كروي مملوء، إنّه نموذج لكائن رياضياتي يُسمّى الجُلّة.

3) اذكر مُجسمات أخرى متواجدة في محيطك تُعتبر نموذجًا لكرة أو جُلّة.

4) r عدد موجب تماما. أنقل ثم اتمم ما يلي:

مجموعة النقط من الفضاء التي تبعد بمسافة ثابتة r عن نقطة ثابتة O

هي......ذات المركز O ونصف القطر r.

مجموعة النقط من الفضاء التي تبعد بمسافة أصغر من أو تُساوي r عن نقطة ثابتة O

هي......ذات المركز O ونصف القطر r.

2 مقطع كُرة بمُستو

وحدة الأطوال هي السنتيمتر.

(d) كرة مركزها O ونصف قطرها 3 . I نقطة من قطرها [NS]. (P) هو المستوي العمودي في النقطة I على المستقيم (NS). يُسمّى الطول OI المسافة بين النقطة O والمستوي (P)، نضع $OI = x$. (انظر الشكل).

نسمي مقطع الكرة (d) بالمستوي (P) مجموعة النقط المشتركة بين الكرة (d) والمستوي (P).

1) لتكن M نقطة من هذا المقطع، اكتب عبارة IM^2 بدلالة x

حدّد في كل حالة ممّا يلي طبيعة وعناصره المقطع المتحصّل عليه.

$x = 0$ ؛ $x = 1{,}25$ ؛ $x = 2$ ؛ $x = 2{,}8$

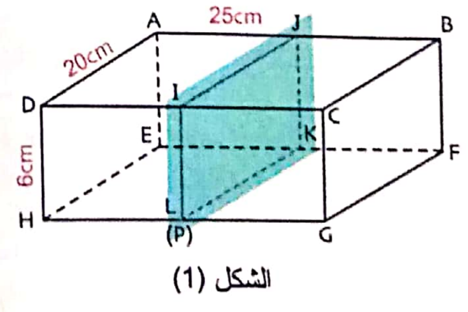
2) حدّد موضع النقطة M في حالة $x = 3$. ما هي النقط المشتركة بين الكرة والمستوي في هذه الحالة؟



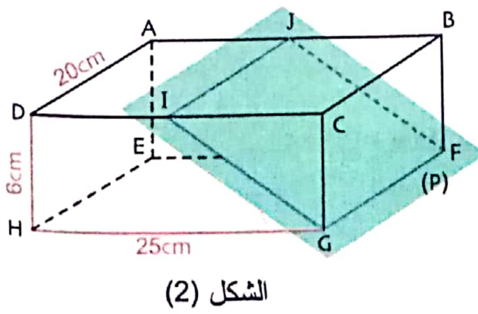
3 مقطع بلاطة قائمة بمستو

1) نقطع البلاطة القائمة ABCDEFGH بمستو يوازي الوجه CBFG.

من بين الشكلين الآتيين، ما هو الشكل الذي يُبيّن المقطع المُناسب؟ اشرح ثُمّ احسب مساحة هذا المقطع.

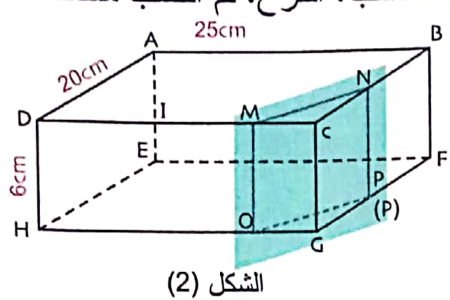


الشكل (1)

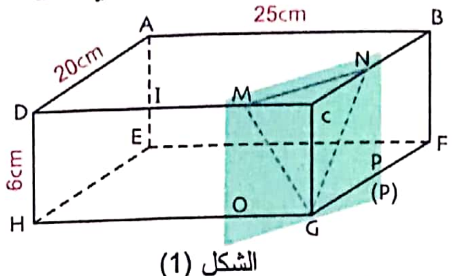


الشكل (2)

2) نقطع البلاطة القائمة ABCDEFGH بمستو يوازي الحرف [CG]. حيث BN = 17cm و DM = 21cm
من بين الشكلين (1) و(2)، ما هو الشكل الذي يُبيّن المقطع المناسب؟ اشرح، ثُمّ احسب مساحة هذا المقطع.



الشكل (2)



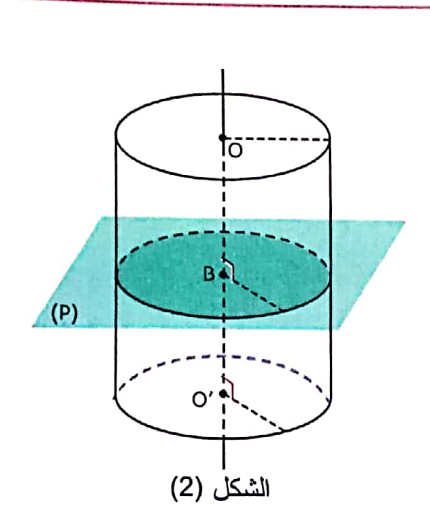
الشكل (1)

4 مقطع أسطوانة الدوران بمستو

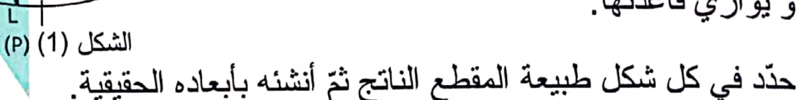
أسطوانة دوران نصف قطر قاعدتها 1,7cm وارتفاعها 6cm.

في الشكل (1): المستوي (P) يقطع الأسطوانة و يُوازي محورها حيث يكون بُعد النقطة O عن المستقيم (IK) هو 0,8cm.

في الشكل (2): المستوي (P) يقطع الأسطوانة و يُوازي قاعدتها.



الشكل (2)



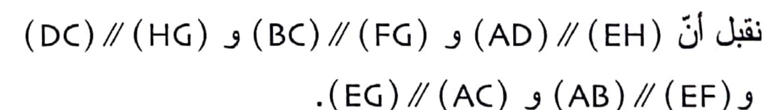
الشكل (1)

حدّد في كل شكل طبيعة المقطع الناتج ثمّ أنشئه بأبعاده الحقيقية.

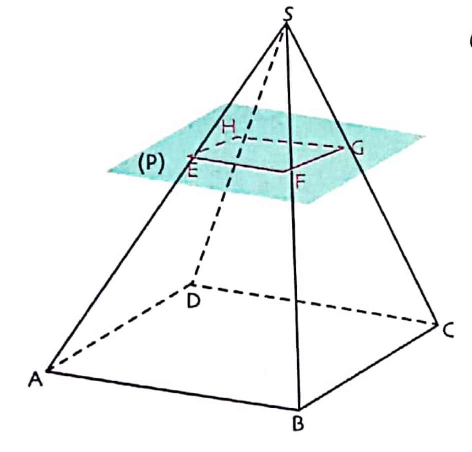
5 مقطع هرم بمستو

SABCD هرم منتظم قاعدته المربع ABCD حيث AB = 4cm.

E نقطة من الحرف [SA] حيث $SE = \frac{3}{4}SA$. (P) هو المستوي الموازي للقاعدة والذي يشمل النقطة E.



نقبل أنّ (AD) // (EH) و (BC) // (FG) و (DC) // (HG) و (AB) // (EF) و (AC) // (EG).



1) احسب EH ؛ HG ؛ FG ؛ EF.

2) احسب AC ثم استنتج أنّ $EG = 3\sqrt{2}cm$.

3) تحقّق أنّ $EG^2 = EF^2 + FG^2$ ثم استنتج طبيعة الرباعي EFGH.

6 التكبير - التصغير

1) ABCDEFGH متوازي مستطيلات. حيث AB = 5cm ؛ BC = 4cm ؛ AE = 3cm.
حجمه $\mathcal{V}$ و $\mathcal{A}$ المساحة الكُلية لأوجهه. أحسب $\mathcal{V}$ و $\mathcal{A}$.

2) أ) احسب أبعاد المُجسّم A'B'C'D'E'F'G'H' الناتج عن تصغير متوازي المستطيلات ABCDEFGH بنسبة $\frac{3}{5}$ ثُمّ مثّله باستعمال وسائل هندسية مناسبة.

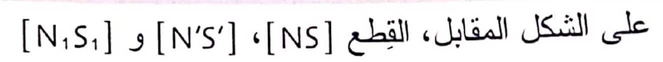
ب) احسب حجمه $\mathcal{V}'$ و $\mathcal{A}'$ المساحة الكُلية لأوجهه. تحقّق أنّ: $\mathcal{V}' = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \mathcal{V}$ و $\mathcal{A}' = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \mathcal{A}$.

1 الكـــرة والجلّـــة

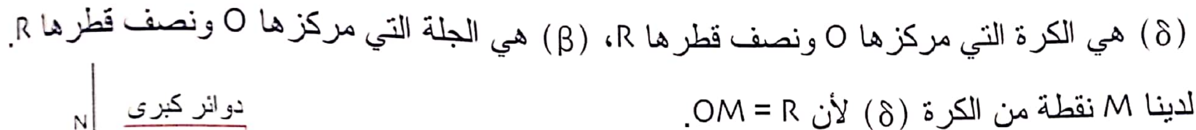
تعاريف

O نقطة من الفضاء و R عدد موجب تماما.

- الكرة التي مركزها O ونصف قطرها R هي مجموعة النقط M من الفضاء حيث $OM = R$.
- الجلة التي مركزها O ونصف قطرها R هي مجموعة النقط M من الفضاء حيث $OM \leq R$.

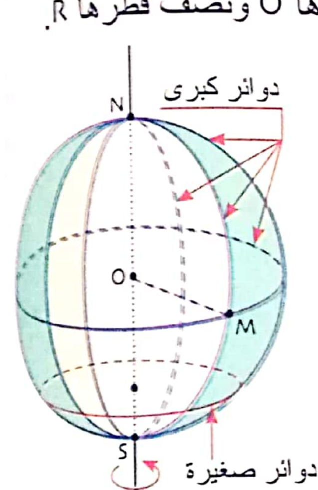


على الشكل المقابل، القِطع $[NS]$، $[N'S']$ و $[N_1S_1]$



لها نفس المنتصف O. إنها أقطار للكرة، طول كل منها هو 2R.

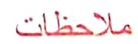
(δ) هي الكرة التي مركزها O ونصف قطرها R، (β) هي الجلة التي مركزها O ونصف قطرها R.



لدينا M نقطة من الكرة (δ) لأن $OM = R$.

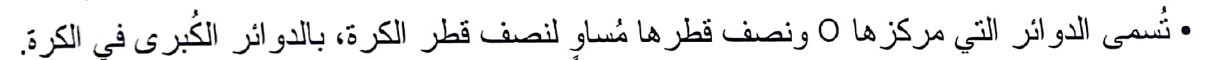
P ليست نقطة من الكرة (δ) لأن $OP < R$. نقول إنّ P تنتمي إلى الجلة (β).

Q ليست نقطة من الكرة (δ) ومن الجلة (β) لأن $OQ > R$.



ملاحظات

- عند تدوير دائرة مركزها O ونصف قطرها R حول أحد أقطارها فإنّه يُولد من هذا الدوران كرة مركزها O ونصف قطرها R.



- تُسمى الدوائر التي مركزها O ونصف قطرها مُساوٍ لنصف قطر الكرة، بالدوائر الكُبرى في الكرة.
- تُسمّى الدوائر التي مركزها يختلف عن O ونصف قطرها أصغر من نصف قطر الكرة، بالدوائر الصُغرى في الكرة.

2 مساحة الكرة وحجم الجلّة

تعريف

- مساحة الكرة التي مركزها O ونصف قطرها R هي $\mathcal{A}$ حيث $\mathcal{A} = 4\pi R^2$.
- حجم الجلة التي مركزها O ونصف قطرها R هو v حيث $v = \frac{4}{3}\pi R^3$.

مثال

مساحة كرة نصف قطرها 1,4cm هي $\mathcal{A}$ حيث $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4\pi(1,4)^2$ أي $\mathcal{A} = 24,63cm^2$ بالتدوير إلى $1mm^2$.

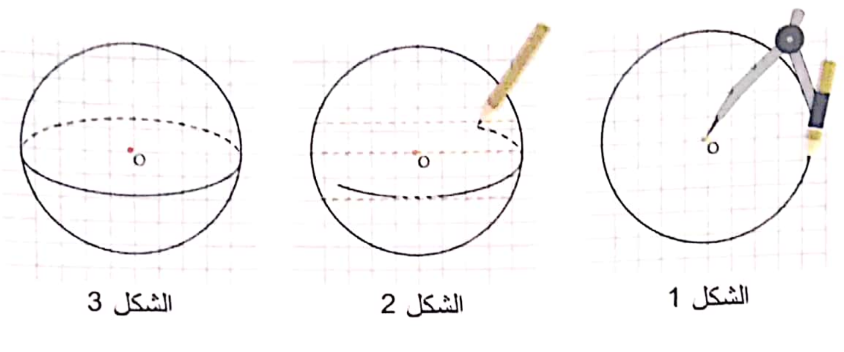
حجم جلة نصف قطرها 1,4cm هو v حيث $v=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(1,4)^3$ أي $v=11,494cm^3$ بالتدوير إلى $1mm^3$.

• تمثيل كرة

تمرين

مثّل كرة مركزها O ونصف قطرها 2,5cm.

حل



الشكل 1 الشكل 2 الشكل 3

يُمكن تمثيل الكرة في المستوي كما يلي:

أ) نرسم دائرة كُبرى مركزها O ونصف قطرها 2,5cm (الشكل 1)

ب) نرسم باليد الحرّة دائرة كُبرى أخرى بيضوية الشكل داخل النطاق المُلوّن (الشكل 2).

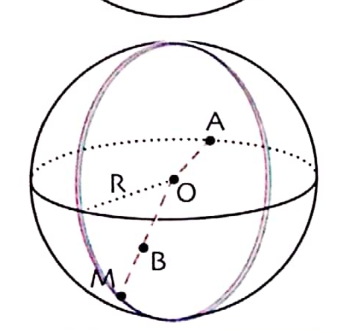
الجزء الأمامي للشكل البيضوي يكون بخط مستمر والجزء الخلفي يكون بخط متقطّع.

جـ) الشكل 3 هو تمثيل للكرة.

• تمثيل نقطة من كرة أو من جلّة

تمرين

لاحظ الشكل المقابل. A نقطة من الكرة التي مركزها O ونصف قطرها R و B نقطة من الجلة المعيّنة بهذه الكرة. انقل الشكل ثم مثّل النقطتين A و B.



حل

1) تمثيل A : نرسم [OA] ثم دائرة كبرى ذات نصف القطر [OA].

2) تمثيل B : نرسم نصف القطر [OM] للكرة حيث B تقع عليه ثم نرسم إحدى الدوائر الكبرى ذات نصف القطر [OM].

A R O B M

طريقة

لتمثيل نقطة على كرة أو داخلها نستعمل إحدى الدوائر الكبرى لهذه الكرة.

دوري الآن

يقطع مستقيم (d) كرة مركزها O ونصف قطرها 2cm في نقطتين A و B حيث $AB = 2cm$.

1) أنجز شكلا مناسبا.

2) برهن أن $\widehat{AOB} = 60°$.

3) I هو منتصف [AB]. احسب OI.

3 المقاطع المستوية لمجسمات مألوفة

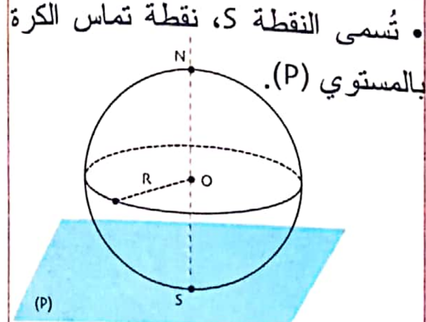
أ) مقطع كُرة بمستوٍ

خاصية

مقطع كُرة بمستوٍ هو دائرة

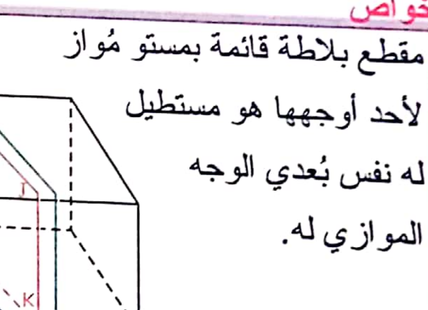
• (S) كرة مركزها O ونصف قطرها R. ليكن [NS] أحد أقطارها. (P) هو المستوي العمودي على (NS) في النقطة A. يُعبّر الطول OA عن المسافة بين النقطة O والمستوي (P). نضع $OA = h$.

• إذا كان $h > R$ فإنّ المستوي (P) لا يقطع الكُرة.

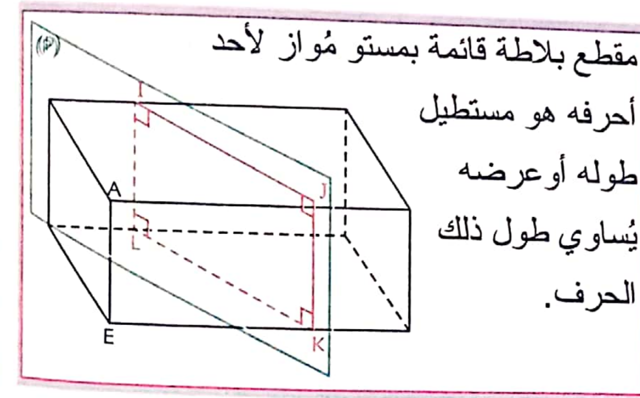
إذا كان $0 < h < R$	إذا كان $h = 0$ (أي أنّ النقطتين A و O منطبقتان)	إذا كان $h = R$
• فإنّ مقطع الكرة (S) بالمستوي (P) هو الدائرة ذات المركز A ونصف القطر AM حيث $AM = \sqrt{MO^2 - OA^2}$ لأنّه من أجل كل نقطة M من هذه الدائرة فإنّ المثلث OAM قائم في A.	• فإنّ مقطع الكرة (S) بالمستوي (P) هو الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها R. • مقطع الكرة بهذا المستوي في هذه الحالة هي دائرة كبرى.	• المستوي (P) والكرة (S) يشتركان في نقطة واحدة إمّا N وإمّا S. • في هذه الحالة يكون المستوي (P) مماسًا للكرة في إحدى النقطتين إمّا N وإمّا S (انظر الشكل). • تُسمى النقطة S، نقطة تماس الكرة بالمستوي (P). 

خواص

مقطع بلاطة قائمة بمستوٍ مُوازٍ لأحد أوجهها هو مستطيل له نفس بُعدي الوجه الموازي له.



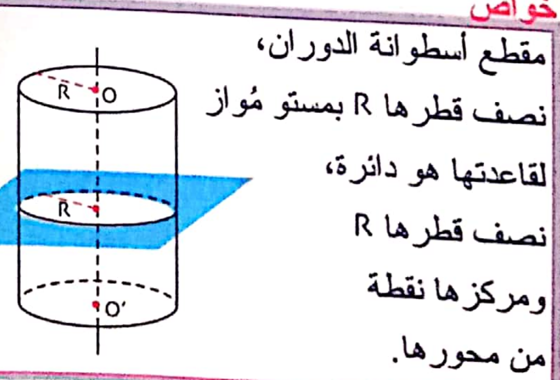
مقطع بلاطة قائمة بمستوٍ مُوازٍ لأحد أحرفه هو مستطيل طوله أو عرضه يُساوي طول ذلك الحرف.



جـ) المقاطع المستوية لأسطوانة الدوران

خواص

مقطع أسطوانة الدوران، نصف قطرها R بمستوٍ مُوازٍ لقاعدتها هو دائرة، نصف قطرها R ومركزها نقطة من محورها.



مقطع أسطوانة الدوران بمستوٍ مُوازٍ لمحورها هو مستطيل، طوله أو عرضه يُساوي ارتفاع الأسطوانة.

• حساب نصف قطر مقطع كُرة بمستو

تمرين

يقطع مستو (P) كرة مركزها O ونصف قطرها 2,5cm وفق دائرة مركزها ′O نقطة تقاطع المستقيم الذي يشمل O والعمودي على هذا المستوي حيث $OO' = 1,5cm$.

أنجز تمثيلا مناسبا ثُم عيّن نصف قطر الدائرة.

حل

لتكن M نقطة من الدائرة (مقطع الكرة بهذا المستوي (P)).

OM هو نصف قطر الكرة و O′M نصف قطر الدائرة و $(OO') \perp (O'M)$.

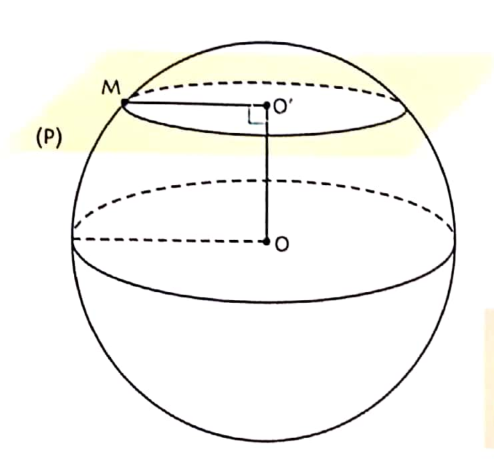
بتطبيق خاصية فيثاغورث في المثلث OO′M القائم في ′O، يكون $OM^2 = OO'^2 + O'M^2$

ومنه $2,5^2 = 1,5^2 + O'M^2$

أي $O'M^2 = 2,5^2 - 1,5^2$

وعليه $O'M^2 = 4$ أي $O'M = \sqrt{4} = 2$.

إذن نصف قطر الدائرة هو 2cm.



يُمكن استعمال خاصية فيثاغورس

لحساب نصف قطر مقطع كُرة بمستو لا يمر بمركزها

دوري الآن

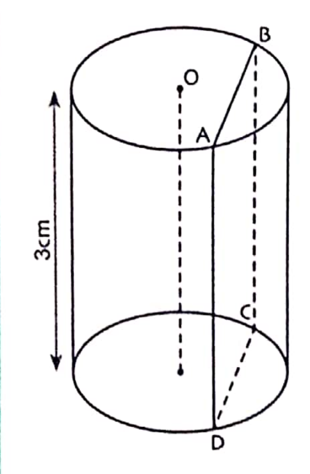
(P) مستو مُواز لمحور أسطوانة دوران ارتفاعها 3cm ونصف قطر قاعدتها 2cm.

يقطع الأسطوانة وفق الرباعي ABCD.

1) ما نوع الرباعي ABCD.

2) نفرض أنّ المسافة بين النقطة O والمستقيم (AB) هي 1cm.

احسب القيمة المضبوطة لمساحة الرباعي ABCD.



د) المقاطع المستوية لهرم ولمخروط

خواص

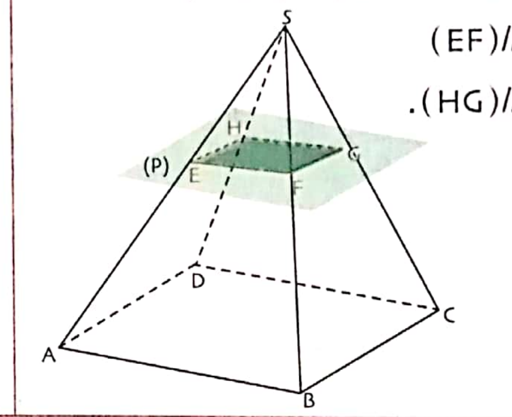
• مقطع هرم بمستو مُواز لقاعدته هو مضلع له نفس طبيعة القاعدة.

مثال: في الشكل SABCD هرم قاعدته مربع. مقطع مستو لهذا الهرم هو المربع EFGH، طول ضلعه تصغير لطول ضلع مربع قاعدة الهرم.

لدينا $(AD)//(EH)$ و $(BC)//(FG)$.


و $(AB)//(EF)$

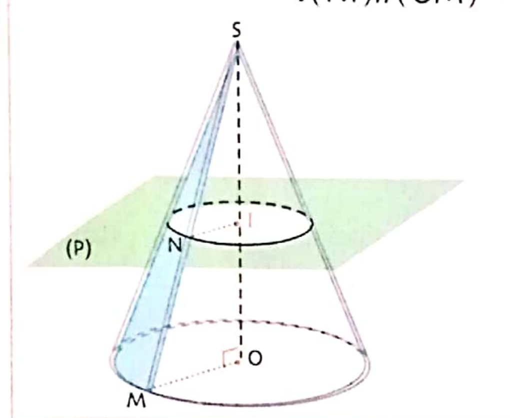
و $(DC)//(HG)$.



• مقطع مخروط دوراني بمستو مُواز لقاعدته هو دائرة مركزها نقطة من ارتفاعها.

مثال: يُمثّل الشكل مقطعا مُوازيا لقاعدة المخروط الدوراني. المقطع الناتج هو دائرة مركزها I ونصف قطرها تصغير لنصف قطر قاعدة المخروط.

لدينا أيضا $(OM)//(NI)$.



ملاحظة : مقطع هرم أو مخروط دوران بمستو يوازي قاعدته هو تصغير لمضلع القاعدة أو دائرة القاعدة.

4 التكبير – التصغير

خاصية

عند التكبير أو التصغير بنسبة k فإنّ:

- الأطوال تُضرب في العدد k.
- المساحات تُضرب في العدد k^2.
- الحجوم تُضرب في العدد k^3.
- أقياس الزوايا لا تتغيّر.
- التوازي محفوظ.

ملاحظة

1) إذا كان $K > 1$ فإنّ k هو نسبة التكبير وإذا كان $0 < K < 1$ فإنّ k هو نسبة التصغير.

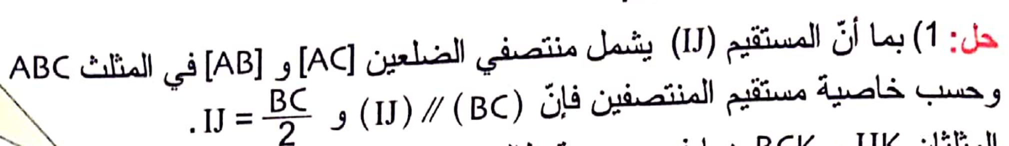
2) في الشكل الأول من الفقرة د).

الهرم SEFGH هو تصغير للهرم SABCD بالنسبة $K = \frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB} = ... = \frac{EF}{AB}$

3) في الشكل الثاني من الفقرة د).المخروط الدوراني الذي رأسه S وقاعدته الدائرة التي مركزها I هو تصغير للمخروط الدوراني الذي رأسه S وقاعدته الدائرة التي مركزها O بالنسبة $K = \frac{SI}{SO} = ... = \frac{SN}{SM}$

• حساب نسبة تكبير أوتصغير واستعمالها في المستوي

تمرين: ABC مثلث. I منتصف [AC] و J منتصف [AB] و K نقطة تقاطع [JC] و [IB].



1) بيّن أنّ المثلث IJK هو تصغير للمثلث BCK. حدّد نسبة التصغير.

2) احسب مساحة المثلث IJK.

حل: 1) بما أنّ المستقيم (IJ) يشمل منتصفي الضلعين [AC] و [AB] في المثلث ABC وحسب خاصية مستقيم المنتصفين فإنّ $(IJ) /\!/ (BC)$ و $IJ = \frac{BC}{2}$.

المثلثان IJK و BCK هما في وضعية طالس. فحسب خاصية طالس نكتب:

$\frac{KI}{KB} = \frac{KJ}{KC} = \frac{IJ}{BC} = \frac{1}{2}$. نحصل على أطوال أضلاع المثلث IJK بضرب أطوال أضلاع المثلث BCK في $\frac{1}{2}$.

المثلث IJK هو تصغير للمثلث BCK و نسبة التصغير هي $\frac{1}{2}$.

2) مساحة المثلث BCK هي $\boxed{A = 5{,}6cm^2}$ $\left(A = \frac{1}{2} \times 7 \times 1{,}6 = 5{,}6\right)$. ومنه

مساحة المثلث IJK هي $\boxed{A' = 1{,}4cm^2}$ $\left(A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 5{,}6cm^2 = 1{,}4cm^2\right)$.

• حساب نسبة تكبير أوتصغير واستعمالها في الفضاء

تمرين: في الشكل المقابل، المخروط الدوراني (δ) الذي رأسه S وقاعدته الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها R وحجمه $\mathcal{V}$، نقطعه بمستو مُواز لقاعدته فنحصل على مخروط مُصغّر له (δ') حجمه $\mathcal{V}_1$ ونصف قطر قاعدته r.

1) حدّد نسبة التصغير، ثمّ عبّر بدلالة R عن نصف قطر قاعدة المخروط المُصغّر.

2) عبّر بدلالة R عن حجم جذع المخروط $\mathcal{V}_2$.

يُسمّى جُزء المخروط (δ) المحصور بين القاعدة والمقطع بجذع المخروط

حل: 1) نسبة التصغيرهي $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{SI}{SO}$. ومنه $r = \frac{3}{4}R$

2) لدينا $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V} - \mathcal{V}_1$.

بما أنّ المخروط (δ') هو تصغير للمخروط (δ) في النسبة $\frac{3}{4}$

فإنّ $\mathcal{V}_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \mathcal{V}$.

وعليه $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V} - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \mathcal{V}$ أي $\mathcal{V}_2 = \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3\right) \times \mathcal{V}$ ومنه $\mathcal{V}_2 = \frac{37}{64}\mathcal{V}$

لكن $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ و $h = 8cm$ إذن $\mathcal{V} = \frac{8}{3}\pi R^2$. ومنه $\mathcal{V}_2 = \frac{37}{64} \times \frac{8}{3}\pi R^2$ وعليه $V^2 = \frac{37}{24}\pi R^2$

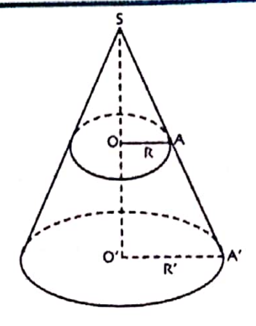
دوري الآن

(δ) مخروط دوران ارتفاعه 4cm و نصف قطر قاعدته 1,5cm.

ننجز تكبيرا لهذا المخروط في النسبة $\frac{7}{4}$، ينتج عن هذه العملية المخروط (δ').

احسب حجم المخروط (δ').

ماهو نصف قطر قاعدته؟ ماهو إرتفاعه ؟



تمثيل الكرة و الجلة

1 في الشكل المقابل، (S) كُرة نصف قطرها 3,5cm ومركزها O.

(d) مستقيم يقطع هذه الكرة في نقطتين A و B.

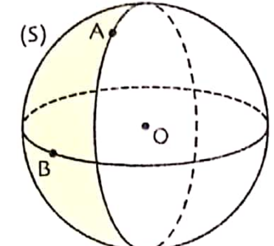
هل يُمكن أن يكون:

AB = 3,5cm ؟

AB = 7cm ؟

AB = 7,5cm ؟

2 في الشكل المقابل، (S) كُرة نصف قطرها 5cm ومركزها O.



A و B نقطتان من الكرة (S) بحيث AB = 6cm.

I منتصف [AB].

1) ارسم المثلث OAB بأبعاده الحقيقية.

2) ما نوع المثلث OAB.

3) احسب OI.

مساحة الكرة وحجم الجلة

3 احسب مساحة كرة نصف قطرها 1,5cm.

نأخذ $\pi = 3,14$.

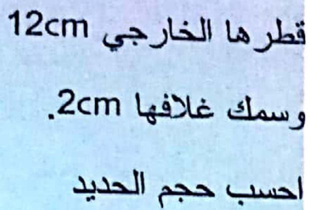
احسب حجم الجلّة التي تعيّنها هذه الكرة.

4 مساحة كرة هي $12,56cm^2$.

ماهو نصف قطرها؟ تدوّر النتيجة إلى 1mm.

ماهو حجم الجلّة الناتجة ؟ تدوّر النتيجة إلى $1mm^3$.

5 كُرية حديدية جوفاء، قطرها الخارجي 12cm وسمك غلافها 2cm.



احسب حجم الحديد الذي تتكون منه.

المقاطع المستوية لمجسمات مألوفة

6 (S) كُرة نصف قطرها 4,5cm ومركزها O. يقطع مستويًا (P) هذه الكرة على بُعد 3,5cm من مركزها O. المستقيم العمودي على المستوي (P) والذي يشمل النقطة O، يقطع هذا المستوي في النقطة B.

1) ماذا تُمثّل النقطة B لهذا المقطع؟

2) M نقطة من هذا المقطع.

ماذا يُمثّل كل من OM و OB؟

3) ما نوع المثلث OMB؟

4) احسب القيمة المضبوطة لـ MB، ماذا يُمثّل MB لهذا المقطع؟

7 كُرة مركزها O ونصف قطرها 6cm، المقطع الناتج من تقاطع مستو بهذه الكرة هو الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها IM.

1) ما هو بُعد هذا المستوي عن النقطة O إذا علمت أنّ ارتفاع الطاقية الكُروية المبتورة هو 2cm؟

2) احسب القيمة المضبوطة لنصف قطر المقطع.

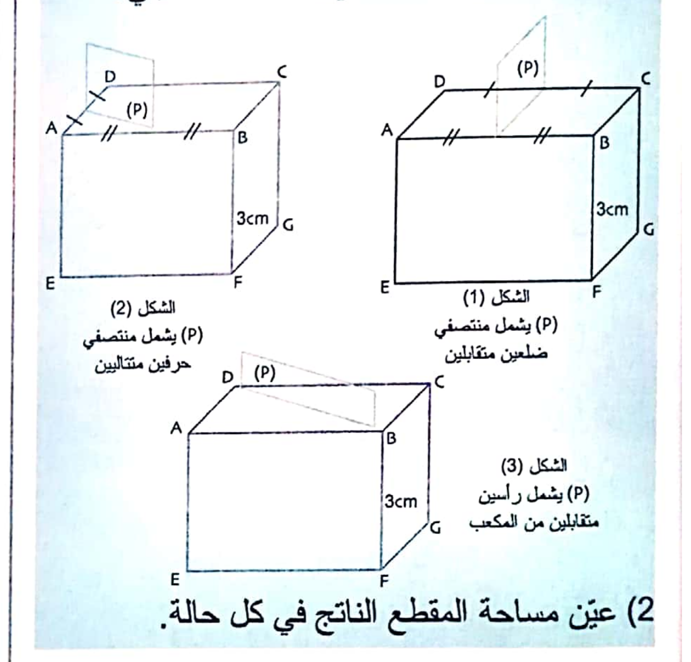
8 ABCDEFGH مُكعّب، طول حرفه 5cm. نقطعه بمستو يشمل الرؤوس ECA.

1) ارسم بالأبعاد الحقيقية وعلى الشكل نفسه كلا من المثلثين ADC و EFG والرباعي ACGE وبيّن نوع كل منهما

2) احسب القيمة المضبوطة لكل من AC و AG.

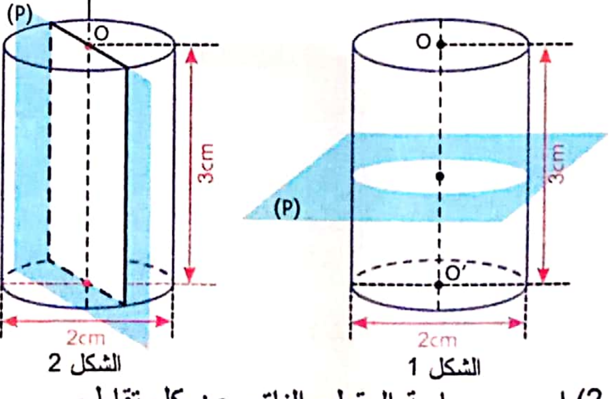
3) احسب القيمة المضبوطة لمساحة الرباعي ACGE.

9 1) ارسم بالأبعاد الحقيقية المقاطع المستوية للمستوي (P) مع المكعب في كل حالة مما يلي:



2) عيّن مساحة المقطع الناتج في كل حالة.

10 1) ارسم بالأبعاد الحقيقية المقاطع المستوية للمستوي (P) مع أسطوانة الدوران في كل من الحالتين (1) و (2).



2) احسب مساحة المقطع الناتج عن كل تقاطع.

11 لاحظ الشكل المقابل.

نصف قطر قاعدة الأسطوانة هو 2,9cm وارتفاعها 7cm.

(P) مستو يوازي (OO') ويقطع الأسطوانة وفق المستطيل ABCD.

وبحيث يكون بُعد النقطة O عن المستقيم (AB) هو OH = 2,1cm.

1) ماهي طبيعة المثلث AOB؟

2) احسب BH.

3) احسب مساحة المقطع الناتج.

12 هرم منتظم رأسه S وقاعدته مثلث متقايس الأضلاع.

ارسم بالأبعاد الحقيقية مقطع هذا الهرم بمستو (P) مُوازٍ لقاعدته.

التكبير - التصغير

13 يكبّر نصف قطر كرة بنسبة 20%.

1) بأي نسبة مئوية تكبّر مساحتها ؟

2) بأي نسبة مئوية يكبّر حجم الجلة المحدّدة بهذه الكرة ؟

14 ننجز تكبيرا لأبعاد مخروط دوران بنسبة 40% .

بأي نسبة يكبّر حجمه؟

في كل حالة مما يلي اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة، وبرّر اختيارك.

	الأسئلة	الإجابات (1)	(2)	(3)	عند الحاجة أعود إلى الصفحة
1	مساحة سطح كرة نصف قطرها 2cm هي	$(16\pi)cm^2$	$(8\pi)cm^2$	$(32\pi)cm^2$	166
2	حجم جلة نصف قطرها 2cm هو	$(36\pi)cm^3$	$(108\pi)cm^3$	$(\frac{32}{3}\pi)cm^3$	166
3	مقطع مستو لكرة نصف قطرها 5cm حيث المستوي يشمل النقطة O مركز الكرة هو	دائرة نصف قطرها 5cm	دائرة قطرها 10cm	قرص نصف قطره 5cm	168 و 169
4	مقطع مستو لجلة نصف قطرها 4cm حيث المستوي يبعد عن المركز O للجلة بمسافة 2cm هو قرص نصف قطره يساوي............	$(2\sqrt{3})cm$	$(3\sqrt{2})cm$	12cm	168 و 169
5	مقطع مستو لأسطوانة دوران حيث هذا المستوي يوازي محور الأسطوانة هو	مستطيل	دائرة	ليس مستطيلا وليس دائرة	168 و 169
6	كرة نصف قطرها 3cm. إذا ضربنا نصف قطر هذه الكرة في $\frac{1}{3}$ فإن...	مساحتها تُضرب في 9	مساحتها تُضرب في $\frac{1}{9}$	مساحتها تُضرب في $\frac{1}{3}$	170
7	لتكبير مكعب بنسبة 50% يكفي ضرب حرف هذا المكعب في	$\frac{1}{2}$	50%	$\frac{15}{10}$	170

أُدمج تعلّماتي

وضعية

تستعمل إحدى فرق كرة القدم، كُرة ذات المميزات الآتية:

- كُروية الشكل.
- طول دائرة كبرى منها يتراوح بين 68cm و 71cm.
- كتلتها تتراوح بين 410g و 450g. في بداية المقابلة، تضبط كمية الهواء داخلها تحت ضغط يتراوح بين 0,6 بار و 1,1 بار. نفرض أن الكرة المستعملة في مقابلة معينة ذات دائرة كبرى طولها 70cm. ماهو نصف قطر هذه الكرة ؟ احسب مساحة هذه الكرة. عيّن حجم الهواء المتواجد داخل هذه الكرة. (تعطى القيمة المضبوطة والمدوّر إلى الوحدة لكل مقدار)

تحليل الوضعية

قراءة الوضعية وتحليلها: • عمّ يتحدث النص ؟ • رتب المعطيات ثم حدّد التعليمة (أو التعليمات)

تحليل الوضعية واختيار استراتيجية حل مناسبة: • ماهي المعطيات المفيدة في النص ؟

• ماهي العلاقة الموجودة بين هذه المعطيات والتعليمة؟

تنفيذ استراتيجية الحل المختارة: • ابحث عن نصف قطر دائرة كبرى بمعرفة طولها.

• استعمل دستور مساحة كرة عُلِم نصف قطرها. • استعمل دستور حجم جلة عُلم نصف قطرها.

• استعمل حاسبة لإيجاد المدوّر إلى الوحدة لكل مقدار.

15 ارتفاع مخروط دوران هو 8cm وقطر قاعدته هو 8cm.

يقطع هذا المخروط مستو يوازي قاعدته ويقع على بُعد 6cm من رأس المخروط.

1) احسب نصف قطر قاعدة المخروط الناتج.

2) المخروط الناتج هو تصغير للمخروط المعطى بنسبة k. ماهي قيمة النسبة k؟

16 إناء نصف كروي الشكل مملوء بالماء. عندما نسكب هذا الماء في وعاء أسطواني الشكل، يرتفع الماء بـ 2,5cm.

1) احسب قطر الوعاء.

2) احسب بالسنتيلتر، كمية الماء المحتوى في الإناء.

17 ارتفاع أسطوانة دوران هو 11cm.

يقطع هذه الأسطوانة مستو (P) يوازي محورها ويبعد عنه بـ 2cm.

ينتج عن هذا التقاطع مستطيل بعداه 11cm و8cm.

احسب نصف قطر الأسطوانة. تدوّر النتيجة إلى 1mm.

18 مخروط دوران، نصف قطر قاعدته 4cm وطول مولّد له 5cm. (الشكل)

1) ماهو ارتفاع هذا المخروط ؟

2) ماهو حجم هذا المخروط ؟

3) ننجز تصغيرا بنسبة $\frac{1}{2}$ لهذا المخروط. ماهو حجم المخروط الناتج ؟

19 كرة مركزها O ونصف قطرها r = 17cm. [AB] قطر للكرة.

K نقطة من [AB] بحيث OK = 15cm.

المستو المار بالنقطة K والعمودي على [AB] يقطع هذه الكرة.

1) ما نوع المقطع الناتج؟

2) ما نوع المثلث OKM؟

- استنتج الطول KM.

20 قاعة على شكل متوازي مستطيلات، ارتفاعها 3m وأرضيتها المستطيل EFGH حيث EF = 8cm و EH = 6cm.

1) ما نوع المثلث ACG؟

2) أنشئ المثلث ACG (نأخذ 1cm لكل 1m). احسب AG.

3) I نقطة من قطعة المستقيم [AG] بحيث $\frac{GI}{GA} = \frac{1}{3}$. المستقيم الموازي لـ (CG) والمار من النقطة I يقطع (AC) في النقطة I'. احسب CI'.

21 كمية الهواء المعبأة داخل كرة اليد هي 980cm³. احسب قيمة مقرّبة لنصف قطر هذه الكرة ثم قيمة مقرّبة لحجمها.

22 الشكل المقابل هو لمكعب حرفه 6cm.

I منتصف [AE] و J منتصف [BF].

مثّل بالأبعاد الحقيقية:

المربع ABFE، المثلث IEH،

الرباعي HIJG، المثلث BFH.

23 نسكب داخل كأس مخروطي الشكل ثلاثة سوائل على التوالي: الزئبق، الماء ثم الزيت.

السوائل الثلاثة تملأ الكأس دون أن تمزج وتُشكّل ثلاث طبقات متساوية السُمك.

نرمز بـ V_m لحجم الزئبق وبـ V_e لحجم الماء وبـ V_h لحجم الزيت.

1) تحقق أنّ: $V_e + V_m = 8V_m$ و $V_m + V_e + V_h = 27V_m$

2) استنتج مما سبق V_e و V_h بدلالة V_m.

24 نزيد ارتفاع مخروط بـ 3% ونُخفض نصف قطره بـ 10%. هل ينخفض أو يزداد حجمه؟ وبأي نسبة؟

استعمال جيوجيبرا لتمثيل كرة ومقاطع مستوية

(S) كرة مركزها O ونصف قطرها a مقطوعة بمستو (P) على مسافة b من O. نسمي (B) المقطع الناتج.

ارسم المقطع (B).

احسب مساحة المقطع (B) وحجم الجلّة المعينة بالكرة (S).

1) تهيئة

انقر على Affichage ثم اختر Graphique 3D فيظهر الجزء 3D من الصفحة جيوجبرا على اليمين والجزء 2D على اليسار.

2) رسم الكرة (S) التي مركزها O ونصف قطرها a.

- احجز النقطة O: Saisie O = (0 , 0)
- انقر على الجزء 2D من الصفحة ثم على [a=2] وعلى [Curseur a=2] ثم على الصفحة واختر Incrément : 0,1 max : 5 min : 0 فيظهر الزالق a.
- احجز Saisie : Sphère(O , a) فتظهر الكرة (يمكن تكبيرها باستعمال الزالق a).

اضغط بيمنى الفارة على الكرة واختر [Renommer ^a_b] ثم احجز s.

3) اظهار المقطع (B)

أظهر الزالق b كالزالق السابق a.

- احجز z = b فيظهر مستوٍ نسميه p باستعمال [Renommer ^a_b].
- احجز [Saisie: Intersection chemins (p.s)] . حرّك الزالق، ماذا تلاحظ؟
- انقر على الجزء 3D من الصفحة ثم على Intersection de deux surfaces ثم (P) ثم على الكرة.

حرّك الزالق b، ماذا تلاحظ؟

4) حساب حجم الجلّة (S) ومساحة المقطع (B)

انقر على الجزء 3D ثم على Aire ثم انقر على المقطع فتظهر مساحته.

انقر على الجزء 3D ثم على Volume ثم انقر على الكرة فيظهر حجم الجملة.

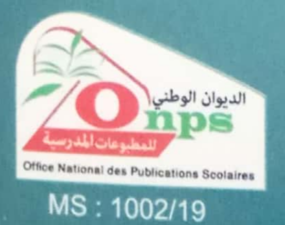
دوري الآن

(C) مخروط دوراني ارتفاعه b ونصف قطر قاعدته a. (s) هو مقطع (C) بمستو مواز لقاعدته.

استعمل البرمجية جيوجبرا لإنجاز الشكل ولإظهار حجمه (C) ومساحته (s).

كتاب مدرسيّ معتمد من طرف

وزارة التّربية الوطنيّة تحت الرّقم 394 / م.ع / 2019



MS : 1002/19

السّعر :273,92 دج

